31.01.19

88-112 אלגברה לינארית 1 – פתרון מועד א'

<u>חלק א'</u>

1. (30 נק') יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית, תהיינה $T,S:V\to V$ העתקות לינאריות (אופרטורים), נסמן את העתקת הזהות ב $I:V\to V$.

א. הוכיחו/הפריכו: אם $T^2+T=S$ ו T הפיכה אזי S הפיכה.

<u>הפרכה</u>: נבחר $T=-I$ שהיא כמובן הפיכה, אך $T^2+T=I-I=0$ אינה הפיכה.

ב. הוכיחו/הפריכו: אם $T^2+T=S$ ו S הפיכה אזי T הפיכה.

<u>הוכחה</u>: ישנן הוכחות מגוונות לסעיף זה, נציג אחת מהן:

נרכיב בשני הצדדים את ההופכית של S ונקבל $T\left(T+I\right)S^{-1}=I$.

נובע כי T על כיוון ש I על.

מכיוון ש T אופרטור על, היא גם הפיכה.

ג. הוכיחו/הפריכו: אם $\left(T-S\right)^2=0$ וגם T הפיכה, אזי S הפיכה.

<u>הפרכה</u>: נבחר $V=\mathbb{R}^2$, ונגדיר לפי משפט ההגדרה את ההעתקות.

אנחנו רוצים ש $\left(T-S\right)\left(T-S\right)=0$, זה נכון אם $\left(T-S\right)\left(T-S\right)$ שולחת כל איבר בבסיס $\{e_1,e_2\}$ לאפס.

לכן מספיק לבחור העתקות כך ש $(T-S)e_1=0$ וגם $(T-S)e_2=e_1$, כיוון שאז $\left(T-S\right)\left(T-S\right)e_2=\left(T-S\right)e_1=0$.

נבחר $\begin{matrix} Se_1=e_2 \\ Se_2=0 \end{matrix}$, $\begin{matrix} Te_1=e_2 \\ Te_2=e_1 \end{matrix}$

ברור ש S אינה הפיכה כיוון שהיא אינה חח"ע, ברור ש T הפיכה כי התמונה שלה היא כל $V=\mathbb{R}^2$ (כלומר אופרטור על).

כמו כן, $\begin{matrix} (T-S)e_1=0 \\ (T-S)e_2=e_1 \end{matrix}$ בדיוק כפי שרצינו.

2. (9 נק') תהי מטריצה $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$.

<u>הוכיחו</u> שקיימת מטריצה $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש $BA=B^t$, או <u>תנו דוגמה</u> למטריצה $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ עבורה לא קיימת $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ כזו.

<u>הפרכה</u>: נבחר $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$. לכל A מתקיים כי $R_1(BA)=0$ (כלומר השורה הראשונה היא שורת אפסים) לפי כפל שורה, אך $R_1(B^t)\neq 0$.

<u>חלק ב'</u>

3. (30 נק') נגדיר $A=\begin{pmatrix}1&-1&-3\\1&3&5\\1&2&3\end{pmatrix}$

א. מצאו בסיס ומימד ל $C(A)\cap R(A)$.

נעביר את מרחב השורות ומרחב העמודות לצורה אלגברית.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-3&x\\1&3&5&y\\1&2&3&z\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-3&x\\0&1&2&y-z\\0&3&6&z-x\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&-3&x\\0&1&2&y-z\\0&0&0&4z-x-3y\end{array}\right)$$

מדירוג זה בינתיים גילינו כי

$$C(A)=sp\{(1,1,1),(-1,3,2)\}=\{(x,y,z)\mid x+3y-4z=0\}$$

כעת נשים את שורות המטריצה בעמודות ונבצע חישוב דומה.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&x\\-1&3&2&y\\-3&5&3&z\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&x\\0&4&3&y+x\\0&8&6&z+3x\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&x\\0&4&3&y+x\\0&0&0&x-2y+z\end{array}\right)$$

ולכן

$$R(A)=sp\{(1,-1,-3),(1,3,5)\}=\{(x,y,z)\mid x-2y+z=0\}$$

מכאן נובע כי

$$C(A)\cap R(A)=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,\begin{array}{l}x+3y-4z=0\\x-2y+z=0\end{array}\right\}$$

נמצא פתרון כללי למערכת ההומוגנית, ונקבל בסיס.

$$\begin{pmatrix}1&3&-4\\1&-2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&-4\\0&-5&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&3&-4\\0&1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}$$

ולכן

$C(A)\cap R(A)=sp\{(1,1,1)\}$

והמימד הוא 1.

ב. מצאו בסיס ומימד ל $C(A)\cap N(A)$.

מראש מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית נתון בצורה אלגברית, ואת מרחב העמודות כבר העברנו לצורה האלגברית.

$$N(A)=\left\{(x,y,z)\left|A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0\right.\right\}=\left\{(x,y,z)\left|\begin{matrix}x-y-3z=0\\x+3y+5z=0\\x+2y+3z=0\end{matrix}\right.\right\}$$

לכן

$$C(A)\cap N(A)=\left\{(x,y,z)\left|\begin{matrix}x-y-3z=0\\x+3y+5z=0\\x+2y+3z=0\\x+3y-4z=0\end{matrix}\right.\right\}$$

נמצא פתרון כללי למערכת ההומוגנית

$$\begin{pmatrix}1&-1&-3\\1&3&5\\1&2&3\\1&3&-4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-3\\0&1&2\\0&3&6\\0&4&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-3\\0&1&2\\0&0&-9\\0&0&0\end{pmatrix}$$

כלומר הפתרון היחיד למערכת ההומוגנית הוא $(0,0,0)$ ולכן הבסיס לחיתוך הוא הקבוצה הריקה והמימד הוא 0.

ג. מצאו בסיס למימד ל $C(A)+N(A)$.

כיוון שהמימד של $C(A)$ הוא 2 (מסעיף א), המימד של $N(A)$ הוא 1 (לפי משפט הדרגה).

כיוון שמימד החיתוך ביניהם הוא 0 לפי סעיף ב', נובע לפי משפט המימדים שהמימד של הסכום $C(A)+N(A)$ הוא 3, ולכן הוא שווה לכל המרחב $C(A)+N(A)=\mathbb{R}^3$ ואפשר לבחור את הבסיס הסטנדרטי, למשל.

ד. מצאו את כל ערכי x עבורם מתקיים כי $\left(1,x,x^2\right)\in C(A)$.

מצאנו כבר את הצורה האלגברית של מרחב העמודות בסעיף א', ולכן $\left(1,x,x^2\right)\in C(A)$ אם"ם $1+3x-4x^2=0$.

כלומר הוקטור שייך למרחב העמודות אם"ם $x=1,-\frac{1}{4}$.

4. (20 נק') תהי העתקה לינארית $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}^{2\times2}$ ויהיו

$B=\{1,1+x,x+x^2\}$ בסיס ל $\mathbb{R}_2[x]$

ו $C=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס ל $\mathbb{R}^{2\times2}$.

בנוסף נתונה המטריצה המייצגת $[T]_C^B=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$.

א. מצאו בסיס ומימד ל $\mathrm{Im}(T)$.

ידוע שעמודות המטריצה המייצגת הן $C_i\left([T]_C^B\right)=[Tb_i]_C$.

לכן $[T(1)]_C=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$, נכפול את המקדמים באיברי הבסיס C ונקבל

$$T(1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}$$

באופן דומה נקבל כי

$$T(1+x)=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}$$

$$T(x+x^2)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

כעת כיוון ש B בסיס ידוע כי $\mathrm{Im}\,T=sp\{Tb_1,Tb_2,Tb_3\}=sp\left\{\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\right\}$

כעת המטריצה השלישית שווה למטריצה הראשונה פחות השנייה, ולכן ניתן להסיר אותה מבלי לפגוע במרחב הנפרש.

שתי המטריצות הנותרות אינן פרופורציונליות (כלומר אין אחת שהיא כפל בקבוע של השנייה), ולכן קיבלנו בסיס לתמונה $\left\{\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}$ והמימד הוא 2.

ב. מצאו בסיס ומימד ל $\ker(T)$.

לפי משפט הדרגה, $\dim \operatorname{Im} T + \dim \ker T = \dim \mathbb{R}_2[x] = 3$.

יחד עם סעיף א', ניתן להסיק כי הגרעין הוא ממימד 1.

לכן כל וקטור שונה מאפס בגרעין יהווה בסיס לכל הגרעין.

כבר שמנו לב ש $Tb_1 - Tb_2 = Tb_3$ ולכן $T(b_1 - b_2 - b_3) = 0$.

כלומר, $0 = T\left(1 - (1+x) - (x+x^2)\right) = T\left(-2x - x^2\right)$

לכן בסיס לגרעין הוא $\{2x + x^2\}$.

ג. האם קיים בסיס D ל $\mathbb{R}^{2\times 2}$ עבורו $[T]_D^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$? הוכיחו קביעתכם.

תשובה: <u>לא</u>.

בסעיף א ראינו כי $Tb_1 - Tb_2 = Tb_3$, לכן לכל בסיס D מתקיים כי $[Tb_1]_D - [Tb_2]_D = [Tb_3]_D$

לכן לא ייתכן שקיים בסיס כך שזו המטריצה המייצגת, כיוון ש $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

ד. האם קיים בסיס F ל $\mathbb{R}_2[x]$ עבורו $[T]_C^F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$? הוכיחו קביעתכם.

תשובה: <u>לא</u>.

אם היה בסיס כזה, בדומה לשיטת הפתרון בסעיף א' נקבל כי $Tf_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ולכן

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Im} T$.

אבל קל להוכיח ש $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin \operatorname{Im} T = sp\left\{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, בסתירה.

5. (21 נק')

א. מצאו מטריצה $A\in\mathbb{R}^{2\times 2}$ המקיימת $A^2+I=0$.

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

ב. מצאו מטריצה $A\in\mathbb{C}^{3\times 3}$ המקיימת $A^2+I=0$.

$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & i\end{pmatrix}$ או $A=\begin{pmatrix}i & 0 & 0\\ 0 & i & 0\\ 0 & 0 & i\end{pmatrix}$ (איי-איי-איי).

ג. מצאו מטריצה $A\in\mathbb{C}^{2\times 2}$ המקיימת $AA^t=0$ אבל $A\neq 0$.

אנו צריכים לבחור $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ כך ש $0=AA^t=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+b^2 & ac+bd\\ ac+bd & c^2+d^2\end{pmatrix}$

ולכן נבחר $A=\begin{pmatrix}1 & i\\ i & -1\end{pmatrix}$.