ב"א אנליזה 2 תשעט מועד א

1. חשבו את:

(א) $\int \frac{x^3+1}{x^2+x}\mathrm{d}x$.

פתרון: נבצע חילוק פולינומים:

$$\begin{array}{r|l} & x-1 \\ x^2+x) & x^3 \qquad +1 \\ & -x^3-x^2 \\ \hline & -x^2 \\ & x^2+x \\ \hline & x+1 \end{array}$$

וקיבלנו ש $x^3+1=(x-1)\left(x^2+x\right)+(x+1)$ ולכן

$$\int \frac{x^3+1}{x^2+x}\mathrm{d}x=\int \frac{(x-1)\left(x^2+x\right)+(x+1)}{x^2+x}\mathrm{d}x=\int x-1\mathrm{d}x+\int \frac{x+1}{x^2+x}\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}-x+\int \frac{x+1}{x^2+x}\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{x^2}{2}-x+\int \frac{x+1}{x\left(1+x\right)}\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}-x+\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}-x+\ln|x|+C$$

(ב) $\int x\sin^2(x)\mathrm{d}x$.

פתרון: כיוון ש

$$\sin^2(x)=\frac{1-\cos(2x)}{2}$$

נקבל ש

$$\int x\sin^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\int x\mathrm{d}x-\int x\cos(2x)\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-\int x\cos(2x)\mathrm{d}x\right]$$

ונחשב את $\int x\cos(2x)\mathrm{d}x$ בעזרת באינטגרציה בחלקים:

$$\begin{aligned}\int x\cos(2x)\mathrm{d}x&=\left\{\begin{array}{cc} f=x & f'=1 \\ g'=\cos(2x) & g=\frac{\sin(2x)}{2}\end{array}\right\}=\\ &=\frac{x\sin(2x)}{2}-\int \frac{\sin(2x)}{2})\mathrm{d}x\\ &=\frac{x\sin(2x)}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{-\cos(2x)}{2}+C\\ &=\frac{x\sin(2x)}{2}+\frac{\cos(2x)}{4}+C\end{aligned}$$

ולכן התשובה הסופית היא

$$\int x\sin^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-\int x\cos(2x)\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}-\left(\frac{x\sin(2x)}{2}+\frac{\cos(2x)}{4}\right)\right]+C$$

.2

(א) מצאו את כל האסימפטוטות (אנכיות ו/או משופעות) של הפונקציה $f(x)=\frac{e^x-e}{x^2-1}$.
פתרון: אסימפטוטות אנכיות: הפונקציה לא מוגדרת ±1, נחשב את הגבול

$$\lim_{x\to1}\frac{e^x-e}{x^2-1}\underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to1}\frac{e^x}{2x}=\frac{e}{2}$$

ולכן אין אסימפטוטה אנכית ב $x=1$. נחשב את הגבול השני:

$$\lim_{x\to-1}\frac{e^x-e}{x^2-1}=\left\{\frac{e^{-1}-e}{0}\right\}=\pm\infty$$

כאשר הגבול מימין ל -1 הוא ∞ והגבול משמאל ל -1 הוא $-\infty$ ולכן יש אסימפטוטה אנכית ב $x=-1$.
אסימפטוטה משופעת מימין: נחשב את הגבול

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e}{x\left(x^2-1\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e}{x^3-x}\underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{3x^2-1}\underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{6x}\underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{6}=\infty$$

ולכן אין אסימפטוטה משופעת מימין.
אסימפטוטה משופעת משמאל: נחשב את הגבול

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-e}{x\left(x^2-1\right)}=\{\frac{0-e}{-\infty}\}=0$$

ו

$$b=\lim_{x\to-\infty}f(x)-ax=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-e}{x^2-1}-0=\{\frac{0-e}{\infty}\}=0$$

ולכן $y=0$ אסימפטוטה משופעת משמאל.
(ב) קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_1^\infty\frac{x^2}{e^x}\mathrm{d}x$.
פתרון: הנקודה הבעייתית היחידה היא ∞ שהרי ב $x=1$ (ובכל נקודה אחרת) הפונקציה לא מתאפסת. נראה שהאינטגרל שלנו קטן גבולית מהאינטגרל $\int_1^\infty\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ שמתכנס ולכן גם האינטגרל שלנו מתכנס. הפונקציות $\frac{x^2}{e^x}$ ו $\frac{1}{x}$ חיוביות בתחום $[1,\infty)$ ואפשר להשתמש במבחן הגבול לפונקציות חיוביות:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{e^x}}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{e^{\frac{x}{4}}}\right)^4=0^4=0$$

כאשר מתבססים על הגבול

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{\frac{x}{4}}}\underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{4}e^{\frac{x}{4}}}=0$$

וקיבלנו שהאינטגרל $\int_1^\infty\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ גדול גבולית מהאינטגרל שלנו.

.3

(א) חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin\left(e^t\right)\mathrm{d}t}{\sin^2(x)}\ .$$

פתרון: כיוון ש $\lim_{x\to 0}\int_0^{x^2}\sin\left(e^t\right)\mathrm{d}t=0$ (כיוון ש $\sin\left(e^t\right)$ רציפה והקטע בו עושים אינטגרל שואף ל 0) נוכל בעזרת המשפט היסודי של החדוא לקבל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin\left(e^t\right)\mathrm{d}t}{\sin^2(x)}\underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\left(e^{\left(x^2\right)}\right)}{2\sin(x)\cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin(x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(e^{\left(x^2\right)}\right)}{\cos(x)}=1\cdot\frac{\sin(1)}{1}=\sin(1)$$

(ב) חשבו את גבול הסדרה $a_n=\sum_{k=1}^n\frac{n}{(k-n)^2+nk}$
פתרון: נראה שזהו סכום רימן:

$$a_n=\sum_{k=1}^n\frac{n}{(k-n)^2+nk}=\sum_{k=1}^n\frac{n}{n^2\left[\left(\frac{k-n}{n}\right)^2+\frac{k}{n}\right]}=\sum_{k=1}^n\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\left[\left(\frac{k}{n}-1\right)^2+\frac{k}{n}\right]}$$

ועבור $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2+x}$ שהיא רציפה בקטע $[0,1]$ נקבל ש

$$a_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\to\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{(x-1)^2+x}\mathrm{d}x$$

ומכיוון ש

$$\frac{1}{(x-1)^2+x}=\frac{1}{x^2-2x+1+x}=\frac{1}{x^2-x+1}=\frac{1}{(x-0.5)^2+0.75}=\frac{1}{0.75\left[\left(\frac{x-0.5}{\sqrt{0.75}}\right)^2+1\right]}$$

נקבל

$$\int_0^1\frac{1}{(x-1)^2+x}\mathrm{d}x=\frac{1}{0.75}\int_0^1\frac{1}{\left(\frac{x-0.5}{\sqrt{0.75}}\right)^2+1}\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{c}t=\frac{x-0.5}{\sqrt{0.75}}\\ \sqrt{0.75}\mathrm{d}t=\mathrm{d}x\end{array}\right\}=\frac{\sqrt{0.75}}{0.75}\int_{\frac{-0.5}{\sqrt{0.75}}}^{\frac{0.5}{\sqrt{0.75}}}\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{0.75}}\left[\arctan(t)\Big|_{\frac{-0.5}{\sqrt{0.75}}}^{\frac{0.5}{\sqrt{0.75}}}\right]=\frac{1}{\sqrt{0.75}}\left[\arctan\left(\frac{0.5}{\sqrt{0.75}}\right)-\arctan\left(\frac{-0.5}{\sqrt{0.75}}\right)\right]$$

וזוהי התשובה הסופית.

.4

(א) קרבו את $\frac{1}{e}$עד כדי שגיאה של $h=\frac{1}{100}$.
פתרון: טור טיילור של e^x הוא

$$e^x=\sum_{n=0}^\infty\frac{x^n}{n!}$$

ואם נציב $x=-1$, נקבל

$$\frac{1}{e}=e^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$$

ונקבל שזהו טור לייבניץ ולכן מתקיים שלכל k, יש את החסם

$$\left|\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\right|\leq\left|\frac{(-1)^k}{k!}\right|=\frac{1}{k!}$$

שזהו חסם על השגיאה $\left|\frac{1}{e}-\sum_{n=0}^{k-1}\frac{(-1)^n}{n!}\right|$. כיוון שרוצים שגיאה שקטנה מ $\frac{1}{100}$ נחפש k עבורו $\frac{1}{100}\leq\frac{1}{k!}$. עבור $k=5$ נקבל $\frac{1}{100}<\frac{1}{120}=\frac{1}{5!}$. מכאן שהקירוב

$$\sum_{n=0}^{5-1}\frac{(-1)^n}{n!}=\frac{1}{1}-\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}=\frac{3}{8}$$

עם שגיאה קטנה מ $\frac{1}{100}$כמבוקש.

(ב) חשבו את הסכום $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\cdots$.
פתרון: נכתוב עם סיגמה:

$$1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}$$

כעת, ניעזר בטור טיילור של e^x שהוא

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

ונציב $x=1$ ונקבל

$$e^1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$$

ונציב $x=-1$

$$e^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$$

ונחבר בינהם

$$e^1+e^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n)!}$$

ולכן

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}=\frac{e^1+e^{-1}}{2}$$

5. תהא f פונקציה רציפה המקיימת לכל $x\in\mathbb{R}$ כי $f(x)=f(-x)$.

(א) הוכיחו/הפריכו: $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.
פתרון: הפרכה: $f(x)=x^2$ מקיימת כי $x^2=(-x)^2$ לכל $x\in\mathbb{R}$ אבל

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 x^2\mathrm{d}x=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2=\frac{8}{3}$$

לעומת זאת

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \frac{-1}{3} = \frac{2}{3}$$

ושני האינטגרלים שונים זה מזה.

(ב) הוכיחו/הפריכו: $\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$.

פתרון: הוכחה: מתקיים

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x$$

ובאינטגרל $\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x$ נעשה החלפת משתנים $t = -x$ (ואז $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$) ונקבל

$$\int_{1}^{0} -f(t)\mathrm{d}t = -\int_{1}^{0} f(t)\mathrm{d}t = \int_{0}^{1} f(t)\mathrm{d}t$$

ולכן

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x$$