דף תרגילים 5

1. תהי $x:U\to R^3$ פרמטריזציה של משטח כלשהו ותהי g התבנית היסודית הראשונה. כתבו את הביטוי הבא בעזרת סמלי גאמא, וללא סימוני איינשטיין: $\left\langle x_{ij},x_m\right\rangle \delta^i{}_k g^{mk}$.

ידוע ש $\left\langle x_{ij},x_m\right\rangle g^{mk}=\Gamma^k_{ij}$, לכן

$$\left\langle x_{ij},x_m\right\rangle \delta^i{}_k g^{mk}=\left\langle x_{ij},x_m\right\rangle \delta^i{}_k g^{mk}=\left\langle x_{ij},x_m\right\rangle g^{mi}=\Gamma^i_{ij}=$$
$$=\Gamma^1_{1j}+\Gamma^2_{2j}$$

2. משטח $S\subset R^3$ מוגדר ע"י: $S=\left\{(x,y,z)\in R^3 : x^2+z^2=9\right\}$

א. תארו (במילים ובאמצעות שרטוט) את צורתו הגיאומטרית של המשטח.

חרוט ברדיוס 3 סביב ציר הy.

ב. מצאו פרמטרזציה של המשטח בעזרת הצגתו כאיחוד של גרפים של פונקציות.

$$X_1(u,v)=\left(u,v,\sqrt{9-u^2}\right)$$
$$X_2(u,v)=\left(u,v,-\sqrt{9-u^2}\right)$$

ג. מצאו פרמטרזיציה אחרת של המשטח.

$$X(\theta,y)=(3\cos\theta,y,3\sin\theta)$$

ד. המישורים $x=1$ ו- $y=1$ חותכים את המשטח S לאורך עקומות γ_1 ו- γ_2. מהי העקמומיות של העקומות הנ"ל?

החיתוך עם $x=1$ - הישרים $z=\pm\sqrt{8}$, עקמומיות ישר =0.

החיתוך עם $y=1$ - המעגל $(3\cos\theta,1,3\sin\theta)$, עקמומיות מעגל = ההפכי של הרדיוס = שליש.

ה. מצאו את התבנית היסודית הראשונה של שתי הפרמטריזציות מסעיפים ב' וג'.

$$G_1=\begin{pmatrix}1+\dfrac{u^2}{\left(9-u^2\right)} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$G_2=\begin{pmatrix}9 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

ו. חשבו את אורך העקומה γ_2 בעזרת סעיף ה'.

האורך הוא 6π.

3. תהי $\gamma(t)=\left(f(t),0,g(t)\right),\gamma:[t_1,t_2]\to R^3$ עקומה הנתונה בפרמטריזציית יחידה.

א. הביעו את שטח משטח הסיבוב של γ בעזרת f .

ב. ידוע כעת ש γ היא מעגל ברדיוס β, וכן ידוע שמרכזו נמצא במרחק α **מציר** ה z . חשבו את השטח במפורש.

למשטח יש פרמ' $\mathrm{X}(\phi,\theta)=\big(f(\phi)\cos\theta\,, f(\phi)\sin\theta\,, g(\phi)\big)$, $t_1\le\phi\le t_2$ ו- $0\le\theta\le 2\pi$

התבנית היסודית הראשונה היא, כמו שלמדנו (וקל לחשב עם לא זוכרים)
$G=\begin{pmatrix} f'^2(\phi)+g'^2(\phi) & 0 \\ 0 & f^2(\phi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & f^2(\phi)\end{pmatrix}$.

תבנית השטח היא, אם כן, $\sqrt{\det G}\,d\phi d\theta=f(\phi)d\phi d\theta$, ואנחנו מחפשים את השטח על כל הפרמטריזציה $\int_0^{2\pi}\int_{t_1}^{t_2} f(\phi)d\phi\,d\theta=2\pi\int_{t_1}^{t_2} f(\phi)d\phi$

b. מצאו את השטח במקרה ש γ הוא מעגל ברדיוס β, שמרכזו מרוחק מרחק α מציר ה- z

למדנו על פרמטריזציה במהירות יחידה למעגל שכזה, $\gamma(t)=\left(\beta\cos\frac{t}{\beta}+\alpha,0,\beta\sin\frac{t}{\beta}\right)$,
$0\le\phi\le 2\beta\pi$. אם אתם לא זוכרים את זה קחו את הפרמ' $\gamma(t)=(\beta\cos t+\alpha,0,\beta\sin t)$,
$0\le\phi\le 2\pi$ ותעברו למהירות יחדה בצורה הרגילה.

כעת לפי א' השטח הוא

$$2\pi\int_0^{2\beta\pi}\left(\beta\cos\frac{\phi}{\beta}+\alpha\right)d\phi=\left(\beta^2\sin\frac{\phi}{\beta}+\alpha\phi\right)\Big|_0^{2\beta\pi}=2\alpha\beta\pi$$

4. נתונה עקומה **מישורית** רגולרית ופשוטה $\gamma:[t_1,t_2]\to R^2$. נגדיר את הגליל מעל γ כך:
$$X(t,\mathrm{v})=\left(\gamma^1(t),\gamma^2(t),v\right)$$
א. חשבו את התבנית היסודית הראשונה של X.
ב. מצאו פרמטריזציה של המשטח X כך שהתבנית היסודית הראשונה שלו זהה לתבנית היסודית הראשונה של המישור - $Y(u,v)=(u,v,0)$.

4.2.3 תרגיל

נתונה עקומה פשוטה ורגולרית $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$. נגדיר את הגליל מעל $\gamma(s)$:

$$\mathbf{\Phi} : (a,b) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

באופן הבא:

$$\mathbf{\Phi}(s,u) = (\gamma(s), u) = \left(\gamma^1(s), \gamma^2(s), u\right)$$

הראו כי קיימות קואורדינטות על הגליל כך שהמטריקה הרימנית המתאימה להן היא המטריקה האוקלידית.

פתרון

הנגזרות הן:

$$\frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial s} = (\gamma'(s), 0), \qquad \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} = (0,1)$$

נחשב את רכיבי המטריקה:

$$g_{11} = \left\| \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial s} \right\|^2 = \|\gamma'(s)\|^2, \qquad g_{22} = \left\| \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \right\|^2 = 1$$

$$g_{12} = g_{21} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial s}, \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u} \right\rangle = 0$$

אם נבחר פרמטריזציה טבעית ל־γ נקבל $\|\gamma'(s)\|^2 = 1$ ולכן:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כנדרש. □

5. יהיו שני משטחים בעלי תבניות יסודיות ראשונות, G_1, G_2. ידוע כי סמלי גאמא של התבניות זהים. האם בהכרח גם התבניות זהות?

פתרון

נביא דוגמה נגדית. נגדיר:

$$\mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \text{ו} \qquad \mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ 0 & 2u \end{pmatrix}$$

אז מתקיים עבור $\mathbf{G}_1$:

$$\Gamma^1{}_{11} = \Gamma^2{}_{12} = \Gamma^2{}_{21} = +\frac{1}{2u}\frac{\partial u}{\partial u} = +\frac{1}{2u}$$
$$\Gamma^1{}_{22} = -\frac{1}{2u}\frac{\partial u}{\partial u} = -\frac{1}{2u}$$
$$\Gamma^2{}_{22} = \Gamma^1{}_{12} = \Gamma^1{}_{21} = \Gamma^2{}_{11} = \pm\frac{1}{2u}\frac{\partial u}{\partial v} = 0$$

ועבור $\mathbf{G}_2$:

$$\Gamma^1{}_{11} = \Gamma^2{}_{12} = \Gamma^2{}_{21} = +\frac{1}{4u}\frac{\partial(2u)}{\partial u} = +\frac{1}{2u}$$
$$\Gamma^1{}_{22} = -\frac{1}{4u}\frac{\partial(2u)}{\partial u} = -\frac{1}{2u}$$
$$\Gamma^2{}_{22} = \Gamma^1{}_{12} = \Gamma^1{}_{21} = \Gamma^2{}_{11} = \pm\frac{1}{4u}\frac{\partial(2u)}{\partial v} = 0$$

כלומר, מקדמי כריסטופל של שתי המטריקות הם זהים, אך המטריקות שונות.

6. נתונה פרמטריזציה של משטח, $X(u,v)$ שתחומה $(0,\infty)\times(0,\infty)$ וידוע כי התבנית היסודית הראשונה היא $G(u,v)=\begin{pmatrix} 1/v^2 & 0 \\ 0 & 1/v^2 \end{pmatrix}$. מצאו את סמלי גאמא של פרמטריזציה זו.

משתמשים בנוסחה ומקבלים:

$$\Gamma_{11}^2 = 1/y$$
$$\Gamma_{22}^2 = -1/y$$
$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -1/y.$$

והשאר מתאפסים.