פתרון תרגיל בית 8 במבוא לתורת החבורות
סמסטר א' תש"ף

שאלה 1. תזכורת: שיכון הוא מונומורפיזם (הומומורפיזם חח"ע).

א. מהו המספר הטבעי n הקטן ביותר כך שניתן לשכן את החבורה $\mathbb{Z}_5$ ב-S_n? נמקו.

ב. מצאו שני שיכונים שונים בין החבורות הללו, אחד בדרך קצרה וישנה ואחד בדרך שראינו בתרגול האחרון.

פתרון.

א. המספר הוא $n = 5$. משפט קיילי מבטיח שאכן קיים שיכון של $\mathbb{Z}_5$ ב-S_5, ועבור $n < 5$, אין ב-S_n איבר מסדר 5, לכן אין איך לשכן ב-S_n את איברי $\mathbb{Z}_5$ שסדרם 5 (כלומר: כולם חוץ מ-0).

ב. הדרך הקצרה והישנה היא לשלוח יוצר של $\mathbb{Z}_5$ לאיבר מסדר 5 ב-S_5, למשל: $[1] \mapsto (12345)$, מה שמגדיר הומומורפיזם יחיד: $f : \mathbb{Z}_5 \to S_5$ הפועל כך: $f([a]) = (12345)^a$.
שימו לב שהומומורפיזם זה מוגדר היטב וחח"ע כי שלחנו מחלקות שקילות מודולו 5 לאיברים מסדר 5 (ודאו שאתם מבינים למה זה מוכיח זאת).
הערה: במקום לבדוק שמוגדר היטב ניתן להגדיר את ההומומורפיזם מ-$\mathbb{Z}$, להראות שהגרעין שלו הוא $5\mathbb{Z}$ ולהשתמש במשפט האיזומורפיזם הראשון, שהרי $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_5$.
הדרך השנייה היא בעזרת שיכון קיילי. נחשב את הפעולה של כל איבר ב-$\mathbb{Z}_5$ על כל איבר בה ונקבל תמורה על איברי $\mathbb{Z}_5$ המתאימה לתמורה ב-S_5.
בדרך זו אין צורך להוכיח שנקבל שיכון, הוכחת משפט קיילי מבטיחה זאת. נראה לדוגמה את תמונת שיכון קיילי עבור $[2] \in \mathbb{Z}_5$. נחשב:
$[2] + [0] = [2], [2] + [1] = [3], [2] + [2] = [4], [2] + [3] = [0], [2] + [4] = [1]$ ולכן התמונה של $[2]$ תחת שיכון קיילי היא התמורה "(02413)", כלומר: (13524) (רק שינינו את השמות בצורה עקבית כדי לקבל מספרים בין 1 ל-5). באופן דומה נחשב את תמונות שיכון קיילי של כל איברי $\mathbb{Z}_5$ (התמורות שהתקבלו הן ת"ח של S_5 שאיזומורפית ל-$\mathbb{Z}_5$).

שאלה 2. נסמן כמה איברים של החבורה $GL_2(\mathbb{C})$:

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

ונסמן: $Q = \langle I, J, K \rangle$ (תזכורת: זוהי תת-החבורה הנוצרת ע"י הקבוצה, כלומר: תת-החבורה הקטנה ביותר של $GL_2(\mathbb{C})$ שמכילה את I, J, K).
החבורה Q נקראת חבורת הקווטרניונים. מצאו באופן מפורש שיכון של Q ב-S_8, כלומר: חשבו והוכיחו לאן עובר כל איבר.

רמז: מצאו את כל איברי Q ואת היחסים ביניהם, והיעזרו בכך שבתאריך 16 באוקטובר 1843, ויליאם רואן המילטון חרט על גשר בְּרוּם מרוב התלהבות:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

(זה יכול לחסוך הרבה זמן!).

פתרון. להעשרה, שימוש נפוץ בקווטרניונים הוא לתיאור סיבובים במרחב כפי שמוסבר כאן.
בדיקה ישירה תראה שהמילטון לא טעה. כלומר, אם נסמן את ב-1 את מטריצת היחידה, שהיא איבר היחידה של $GL_2(\mathbb{C})$, נקבל

$$I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ברור ש-1 הוא איבר היחידה של Q, כי זהו איבר היחידה של $GL_2(\mathbb{C})$ (ולמי שלא משוכנע, זכרו שאם I שייך ל-Q, אז מסגירות נובע שגם I^n שייך ל-Q לכל n, בפרט עבור $n = 0$).
כמו ברמז, תחילה ננסה למצוא את כל האיברים של Q.
אם $I^2 = -1$, אז $-1 \in Q$. נשים לב כי ± 1 הם מטריצות סקלריות ולכן מתחלפות עם כל מטריצה. את הסדר של I קל למצוא כי

$$I^4 = (I^2)^2 = (-1)^2 = 1$$

לכן הסדר שלו מחלק את 4, וראינו כבר כי $I^2 \neq 1$. לכן $I^{-1} = I^3 = -I$. באופן דומה רואים כי $J^{-1} = -J$ וכן $K^{-1} = -K$ כי שניהם איברים מסדר 4. כל האיברים שהוזכרו עד עכשיו חייבים להיות שייכים ל-Q. הפרט היחיד מהחריטה של המילטון שלא השתמשנו בו הוא $IJK = -1$. נכפיל ב-K^{-1} מימין ונקבל $IJ = K$. לכן כל איבר שניתן לתאר עם חזקות של K אפשר לתאר גם עם מכפלות של IJ, למשל

$$-IJ = -K = K^{-1} = (IJ)^{-1} = J^{-1}I^{-1} = (-J)(-I) = JI$$

מכאן אפשר להסיק שהאיברים של Q הם בדיוק

$$Q = \{1, -1, I, -I, J, -J, IJ, -IJ\}$$

והקבוצה הזו מכילה את ההופכי של כל איבר, וכל מכפלה של שני איברים מהקבוצה הזו.
הסדר של 1 הוא בוודאי 1, הסדר של -1 הוא 2, והסדר של שאר האיברים הוא 4.
קיבלנו שהסדר של Q הוא 8. משפט קיילי מבטיח שקיים שיכון $\Phi\colon Q \to S_8$, ונמצא אותו במפורש. באופן נאיבי, נצטרך לבצע 64 הכפלות של מטריצות, אבל כמו שראינו למעלה, הסתפקנו בהרבה פחות (בערך 6 הכפלות). מפני שכל איבר של Q ניתן להציג כמכפלות וחזקות של I ושל J, אז מספיק לבדוק לאן שיכון קיילי שולח את I ואת J, ואז רק להרכיב תמורות. לכן מכאן אין כבר צורך בכפל מטריצות, אלא רק בחריטה של המילטון והרכבת תמורות.
נמספר את האיברים של Q שרירותית:

$$1 \leftrightarrow 1, \quad 2 \leftrightarrow -1, \quad 3 \leftrightarrow I, \quad 4 \leftrightarrow -I, \quad 5 \leftrightarrow J, \quad 6 \leftrightarrow -J, \quad 7 \leftrightarrow IJ, \quad 8 \leftrightarrow -IJ$$

התמונה $\Phi(I)$ של I תחת שיכון קיילי היא $l_I : X \mapsto IX$, כלומר הכפל משמאל ב-I. באופן דומה $\Phi(J) = l_J$. נחשב בעזרת השיוויונות שראינו (כמו $I^2 = -1$):

$*$	1	-1	I	$-I$	J	$-J$	IJ	$-IJ$
I	I	$-I$	-1	1	IJ	$-IJ$	$-J$	J
J	J	$-J$	$-IJ$	IJ	-1	1	I	$-I$

ולמי שלא בטוח: $I = (-1)I- = IJJ- = JIJ$. לכן

$$l_I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 7 & 8 & 6 & 5 \end{pmatrix} = (1324)(5768)$$

$$l_J = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 8 & 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1526)(3847)$$

מכאן בעזרת העובדה ש-Φ הומומורפיזם נשלים את החישוב לאן עוברים שאר האיברים

$$\begin{aligned}
\Phi(1) &= \Phi(I^4) = \Phi(I)^4 = \mathrm{id} = \Phi(J)^4 \\
\Phi(-1) &= \Phi(I^2) = \Phi(I)^2 = (12)(34)(56)(78) = \Phi(J)^2 = \Phi(IJ)^2 \\
\Phi(I) &= (1324)(5768) \\
\Phi(-I) &= \Phi(I^{-1}) = \Phi(I)^{-1} = (1423)(5867) = \Phi(I)^3 \\
\Phi(J) &= (1526)(3847) \\
\Phi(-J) &= \Phi(J^{-1}) = \Phi(J)^{-1} = (1625)(3748) = \Phi(J)^3 \\
\Phi(IJ) &= \Phi(I)\Phi(J) = (1728)(3546) \\
\Phi(-IJ) &= \Phi(JI) = \Phi(J)\Phi(I) = (1827)(3645)
\end{aligned}$$

אנחנו יכולים לעשות מבחן שפיות לפתרון שלנו לפי תרגיל החימום. למשל, הסדר של I הוא 4 והוא אכן נשלח למכפלה של $2 = \frac{8}{4}$ מחזורים זרים מאורך 4, ואילו האיבר -1 הוא מסדר 2 ונשלח למכפלה של $4 = \frac{8}{2}$ חילופים זרים. כך גם כל שאר האיברים.

שאלה 3. תהי G חבורה מסדר n ויהי $\Phi\colon G \to S_n$ שיכון קיילי (השיכון מהוכחת המשפט). הוכיחו שאיבר $g \in G$ הוא מסדר m אם ורק אם $\Phi(g)$ הוא מכפלה של $\frac{n}{m}$ מחזורים זרים מאורך m.

פתרון. נניח כי g הוא מסדר m. לכן $g^m = e_G$ וגם $g^i \neq e_G$ לכל $0 < i < m$. שיכון קיילי מוגדר לפי $\Phi(g) = l_g$ כאשר l_g הוא הפונקציה של כפל משמאל ב-g. כדי להבין את מבנה המחזורים של $l_g \in S_n$ צריך להבין לאן l_g שולחת כל איבר של G. נראה הרכבה חוזרת שלו על איבר $x \in G$ מסוים:

$$x \xrightarrow{l_g} gx \xrightarrow{l_g} g^2x \xrightarrow{l_g} g^3x \xrightarrow{l_g} \dots \xrightarrow{l_g} g^{m-1}x \xrightarrow{l_g} g^m x = x$$

לכן $x \in G$ שייך למחזור מאורך m. כך אפשר להמשיך באינדוקציה על איבר מ-G שאינו במחזור לעיל (כלומר לא $g^i x$ עבור האיבר x שבחרנו). לבסוף נקבל שישנם בדיוק $\frac{n}{m}$ מחזורים, וכל אחד מהם מאורך m.

בכיוון השני, זה בסך הכל לחשב סדר של תמורה. הסדר של $\Phi(g)$ הוא כמ"מ אורכי המחזורים בהצגה של התמורה כמכפלת מחזורים זרים, ואצלנו זה $\mathrm{lcm}(m, \dots, m) = m$, לפי הנתון. מפני ש-$\Phi$ הוא שיכון, אז גם הסדר של g הוא m.

שאלה 4. הוכיחו כי:

א. אם $n \neq 4$, אז ל-S_n אין ת"ח מאינדקס $2 < t < n$.

ב. ל-A_6 אין ת"ח מאינדקס ראשוני.

פתרון.

א. לפי העידון של משפט קיילי, אם היתה ל-S_n ת"ח H מאינדקס $2 < t < n$, היה קיים הומומורפיזם לא טריוויאלי: $f : S_n \to S_t$ שהגרעין שלו הוא ת"ח של H.
$\ker(f) \neq \{e\}$ כי לא ייתכן ש-f חח"ע (משיקולי עוצמות), ולכן $\ker(f) = A_n$ כי זוהי תת-החבורה הנורמלית (הלא טריוויאלית) היחידה של S_n לכל $n \neq 4$.
קיבלנו ש-$A_n \leq H \leq S_n$, ולכן מכפליות האינדקס, $[S_n : H] \cdot [H : A_n] = [S_n : A_n] = 2$, מה שאומר ש-$H = S_n$ או $H = A_n$ (כי אחד האינדקסים חייב להיות 1).
בשני המקרים זו סתירה לכך שהיא מאינדקס $2 < t < n$.
הערה: עבור $n = 4$, הטענה אומרת רק שאין ל-S_4 ת"ח מאינדקס 3, אך זה לא נכון. משפט סילו הראשון אומר לנו שיש ת"ח מסדר 8 (ת"ח 2-סילו) ולכן היא מאינדקס 3.

ב. נניח בשלילה שיש ל-A_6 ת"ח H מאינדקס p ראשוני. אם $p < 6$, נקבל סתירה לטענה מהתרגול על אינדקס של ת"ח של A_n (שנבעה מעידון משפט קיילי), חוץ מבמקרה שבו $H = A_6$ אך אז האינדקס 1 ולא ראשוני.
אם $p \geq 6$, נובע ממשפט לגרנז' ש- $p \mid |A_6|$, אבל $|A_6| = 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ ומספר ראשוני מחלק מספר אמ"מ הוא מופיע בפירוק שלו לגורמים ראשוניים. זוהי סתירה לכך ש-$p \geq 6$.

שאלה 5. תהי G חבורה. הוכיחו כי:

א. כפל מימין, כלומר: $g * x = xg$ (לכל $g, x \in G$), אינו בהכרח פעולה של G על עצמה.

ב. כפל מימין בהופכי, כלומר: $g * x = xg^{-1}$ (לכל $g, x \in G$), הוא תמיד פעולה של G על עצמה.

פתרון.

א. עבור $\sigma = (12), \tau = (13)$ ב-S_3 למשל, $(\sigma\tau) * \mathrm{id} = \mathrm{id} \cdot (\sigma\tau) = \sigma\tau = (132)$, אבל $\sigma * (\tau * \mathrm{id}) = \sigma * (\mathrm{id} \cdot \tau) = \sigma * \tau = \tau\sigma = (123)$, לכן זו לא פעולה של חבורה לפי ההגדרה.

ב. יהיו $g, h, x \in G$, אז: $(gh) * x = x(gh)^{-1} = xh^{-1}g^{-1} = g * (h * x)$ וכן $e * x = xe^{-1} = x$, ולכן זו פעולה של חבורה לפי ההגדרה.

שאלה 6. (ממבחן מועד א' תשע"ז) נתון שהחבורה S_3 פועלת על הקבוצה $X = \{R, G, B\}$ כך ש- $(12) * R = G$ ו- $(23) * R = B$.
מצאו בעזרת הנתון את הפעולה של כל איבר בחבורה על הקבוצה X (מומלץ להציג את הפעולה ע"י לוח כפל).

פתרון. ראו שאלה ראשונה: https://math-wiki.com/images/0/01/GrouTheorySol12Margolis5777.pdf

שאלה 7. תהי G חבורה הפועלת על קבוצה X. לכל $x \in X$ נגדיר את המייצב שלו:

$$\mathrm{stab}(x) := \{g \in G \mid g * x = x\}$$

(יש שמסמנים אותו ב-G_x), זהו אוסף איברי החבורה שפעולתם לא משנה את x.

א. הוכיחו כי המייצב הוא תמיד ת"ח של G.

ב. משפט קיילי מראה שכל חבורה פועלת על עצמה באמצעות כפל משמאל.
הוכיחו שיש ב-G רק מסלול אחד עבור פעולה זו (כלומר לכל האיברים יש אותו מסלול) ושהמייצב של כל איבר בחבורה טריוויאלי.

פתרון.

א. יהי $x \in X$. לפי ההגדרה, $\mathrm{stab}(x) \subseteq G$. $e_G \in \mathrm{stab}(x)$ כי $e * x = x$ (מהגדרת פעולה של חבורה על קבוצה).

יהיו $a, b \in \mathrm{stab}(x)$. מתקיים: $(ab) * x = a * (b * x) = a * x = x$, וכן: $b^{-1} * x = b^{-1} * (b * x) = (b^{-1} * b) * x = e * x = x$.

לכן $\mathrm{stab}(x)$ מכילה את איבר היחידה וסגורה לפעולה ולהופכיים ובסה"כ ת"ח של G.

ב. יהיו $x, y \in G$. מספיק להראות שקיים $g \in G$ כך ש-$g * x = y$ (זה אומר שהם באותו מסלול). נבחר $g = yx^{-1}$, ואכן: $g * x = (yx^{-1})x = y$ כי הפעולה אצלנו היא כפל משמאל.

יהי $g \in \mathrm{stab}(x)$. אז: $g * x = gx = x$, ולכן: $g = e$. מכאן שהמייצב של כל איבר טריוויאלי.

בהצלחה!