פתרון תרגיל בית 8 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשע"ח

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. הגישו את התרגיל בתרגול שלכם בשבוע המתחיל בתאריך 14.1.2018.

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שיודעים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1. תהי G חבורה ותהי $H \lhd G$. ראיתם במשפט האיזומורפיזם הרביעי (משפט ההתאמה) את הקשר בין תת־חבורות של ${}^{G}\!/\!{}_{H}$ לבין תת־חבורות של G המכילות את H.

א. הוכיחו שאם $K_1, K_2 \in G$ תת־חבורות המכילות את H, אז

$$(K_1/H) \cap (K_2/H) = (K_1 \cap K_2)/H$$

ב. מכך שאנו יודעים שתת־החבורה הגדולה ביותר של G שמוכלת ב-K_1 וב-K_2 היא $K_1 \cap K_2$, נסחו והוכיחו טענה דומה עבור $(K_1 \cap K_2)/H$.

פתרון.

א. זה ממש לפי משפט ההתאמה. ההכלה הדו־כיוונית בפירוט:

$$\begin{aligned} xH \in (K_1/H) \cap (K_2/H) &\Leftrightarrow \\ xH \in (K_1/H) \wedge xH \in (K_2/H) &\Leftrightarrow \\ x \in K_1 \wedge x \in K_2 &\Leftrightarrow \\ x \in K_1 \cap K_2 &\Leftrightarrow \\ xH \in (K_1 \cap K_2)/H &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

ב. לפי הסעיף הקודם נסיק ש-$(K_1 \cap K_2)/H$ היא תת־החבורה הגדולה ביותר של G/H המוכלת ב-K_1/H וב-K_2/H.

שאלה 2. תהי G חבורה, ותהי $H \leq G$. הוכיחו שאם $N_1, N_2 \lhd G$ תת־חבורות נורמליות המקיימות $N_1 \cap H = N_2 \cap H$, אז $(HN_1)/N_1 \cong (HN_2)/N_2$.

פתרון. מיידי משימוש כפול במשפט האיזומורפיזם השני:

$$(HN_1)/N_1 \cong H/(N_1 \cap H) = H/(N_2 \cap H) \cong (HN_2)/N_2$$

שאלה 3. תהי G חבורה סופית, ויהי $g \in G$ איבר מסדר k. הוכיחו שהשיכון ממשפט קיילי שולח את g למכפלת מחזורים זרים מאורך k.

פתרון. יהי $x \in G$. מה גודל הקבוצה $\{gx, g^2x, g^3x, \dots\}$? מתי $g^i x = g^j x$? כמו כן שימו לב שבשיכון ממשפט קיילי אם $g \neq e$, אז כל איבר $x \in G$ נשלח לאיבר אחר.

שאלות להגשה

פתרו לפחות **שלוש** שאלות מתוך השאלות הבאות. מומלץ לנסות ולהגיש תשובות נוספות, כי גם אם לא מקבלים עליהן ניקוד, עדין מקבלים עליהן משוב.

שאלה 4. תהי G חבורה סופית ותהינה $H,N\leq G$ תת־חבורות.

א. הפריכו ש-$HN\leq G$ היא תמיד תת־חבורה.

ב. אם $H,N\lhd G$ נורמליות כך ש-$\left(\left[G:H\right],\left[G:N\right]\right)=1$, הוכיחו כי $G=HN$.
אתגר רשות: אפשר לוותר על הדרישה לנורמליות, והטענה תשאר נכונה!

פתרון.

א. אפשר לבחור את $G=D_4$ וצריך לבחור תת־חבורות שאינן נורמליות. נבחר את $H=\left\langle\tau\right\rangle,N=\left\langle\tau\sigma\right\rangle$. הקבוצה $HN=\left\{\mathrm{id},\tau,\tau\sigma,\sigma\right\}$ אינה תת־חבורה כי היא אינה סגורה לפעולה. למשל $\tau\sigma\cdot\sigma=\tau\sigma^2\notin HN$. היא גם לא סגורה להופכי כי $\sigma^{-1}\notin HN$.
דוגמה פופלרית אחרת היא $G=S_3$ ו-$H=\left\langle(12)\right\rangle,N=\left\langle(23)\right\rangle$. אז בקבוצה HN ישנם ארבעה איברים $\left\{\mathrm{id},(12),(23),(123)\right\}$. לפי משפט לגראנז' הסדר של תת־חבורה מחלק את סדר החבורה, אבל 4 לא מחלק את $\left|S_3\right|=6$, שזו סתירה.

ב. הוכחה: בכיתה למדנו שמפני ש-$H,N\lhd G$, אז HN היא תת־חבורה (ואפילו נורמלית). בנוסף $H,N\leq HN$. מכפליות האינדקס נקבל

$$\left[G:H\right]=\left[G:HN\right]\left[HN:H\right]$$

וטענה דומה עבור N. לכן $\left[G:HN\right]$ מחלקת את $\left[G:H\right]$ ואת $\left[G:N\right]$. מהנתון שהאינדקסים האלו זרים נסיק כי $\left[G:HN\right]=1$, ולכן $G=HN$.

שאלה 5 (משפט האיזומורפיזם השלישי)**.** תהי G חבורה, תהינה $H,K\lhd G$ תת־חבורות נורמליות, ונניח $H\subseteq K\subseteq G$, אז

$$\left(G/H\right)/\left(K/H\right)\cong G/K$$

בשאלה זו נוכיח את המשפט בעזרת משפט האיזומורפיזם הראשון לפי הדרכה. כחימום, קודם כל ודאו שאתם מבינים למה $H\lhd K$ ולמה טבעי להגדיר הומומורפיזם $f:{}^{G}/_{H}\to{}^{G}/_{K}$ לפי $f(gH)=gK$.

א. הוכיחו ש-f מוגדר היטב. כלומר, שאם $g_1H=g_2H$, אז $f\left(g_1H\right)=f\left(g_2H\right)$.

ב. הוכיחו ש-f הומומורפיזם.

ג. הוכיחו ש-f על.

ד. הוכיחו כי $\ker f={}^{K}/_{H}$.

ה. הסיקו את הדרוש לפי משפט האיזומורפיזם הראשון.

פתרון.

א. נניח כי $g_1H=g_2H$ עבור $g_1,g_2\in G$. לכן $g_1g_2^{-1}\in H$. אבל $H\subseteq K$, כלומר $g_1g_2^{-1}\in K$, ולכן $g_1K=g_2K$. מכאן $f\left(g_1H\right)=f\left(g_2H\right)$, כדרוש.

ב. יהיו $g_1H,g_2H\in{}^{G}/_{H}$. אזי

$$f\left(\left(g_1H\right)\left(g_2H\right)\right)=f\left(g_1g_2H\right)=g_1g_2K=\left(g_1K\right)\left(g_2K\right)=f\left(g_1H\right)f\left(g_2H\right)$$

כאשר השתמשנו בפעולות של חבורות המנה (הרי $H,K\lhd G$).

ג. יהי $gK \in {}^{G}/_{K}$. לכן $f(gH) = gK$, ומכאן ש-f על.

ד. נחשב את $\ker f$:

$$\begin{aligned}\ker f &= \left\{gH \in {}^{G}/_{H} \,\middle|\, f(gH) = e_{G/K}\right\} = \left\{gH \in {}^{G}/_{H} \,\middle|\, gK = K\right\} \\ &= \left\{gH \in {}^{G}/_{H} \,\middle|\, g \in K\right\} = {}^{K}/_{H}\end{aligned}$$

ה. לפי משפט האיזומורפיזם הראשון $(G/H)/\ker f \cong \operatorname{im} f$ ולכן $(G/H)/(K/H) \cong G/K$.

שאלה 6. תהי שרשרת עולה של חבורות $G_1 \subseteq G_2 \subseteq G_3 \subseteq \ldots$, ונסמן $H = \bigcup_i G_i$ עבור איחודן. אפשר לקבל כעובדה שגם H היא חבורה (זו הייתה מסקנה של שאלת רשות 9 בתרגיל בית 4).

א. הוכיחו שאם G_i היא חבורה פשוטה לכל i, אז גם H פשוטה.
הערה: כך ניתן ליצור חבורות פשוטות אינסופיות מחבורות פשוטות סופיות.

ב. תהי S חבורה פשוטה אינסופית. הוכיחו שאם $K \leq S$ תת־חבורה, אז $[S:K]=1$ או $[S:K]=\infty$. רמז: העידון של משפט קיילי.

פתרון.

א. תהי $N \lhd H$. לכן לכל $h \in H$ מתקיים $hNh^{-1} = N$. בפרט לכל i ולכל $g \in G_i$ מתקיים $gNg^{-1} = N$. נתבונן בחיתוך $N \cap G_i$. מתקיים שכל $gxg^{-1} \in g(N \cap G_i)g^{-1}$ שייך גם ל-N (כי היא סגורה להצמדה) ושייך גם ל-G_i (כי זו מכפלה של איברים מ-G_i). לכן $N \cap G_i \lhd G_i$.
אבל לכל i החבורה G_i פשוטה, ולכן או ש-$N \cap G_i = G_i$ או ש-$N \cap G_i = \{e\}$. אם $N \neq \{e\}$ אז קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש-$N \cap G_k \neq \{e\}$, שהרי איבר $n \in N$ שאינו טריוויאלי מוכל ב-G_i כלשהו. לכן $N \cap G_k = G_k$. בפרט לכל $i \geq k$ מתקיים $N \cap G_i \neq \{e\}$, ולכן $N \cap G_i = G_i$. כלומר $G_i \subseteq N$ לכל $i \geq k$. אזי

$$N \subseteq H = \bigcup_i G_i = \bigcup_{i \geq k} G_i \subseteq N$$

וקיבלנו $H = N$. לכן אין ל-H תת־חבורות נורמליות לא טריוויאליות, כדרוש.

ב. אם $S = K$, אז $[S:K]=1$ וסיימנו. אחרת, $K \subsetneq S$. נניח בשלילה כי $[S:K] = n < \infty$. לפי העידון של משפט קיילי, K מכילה תת־חבורה נורמלית $N \lhd S$ המקיימת $[S:N] \,|\, n!$. כלומר $[S:N] < \infty$. מפני ש-S פשוטה ו-$N \neq S$ (כי N מוכלת ב-K) נורמלית, אז בהכרח $N = \{e\}$. לכן $[S:N] = \infty$, וזו סתירה.

שאלה 7.

א. תנו דוגמה לחבורה G ולפעולה נאמנה שלה על קבוצה X כך ש-$(|G|, |X|) = 1$.
הזכרו שבכיתה הוכחנו שאם בנוסף מניחים כי G היא חבורת-p, אז חייבות להיות נקודות שבת לא טריוויאליות.

ב. יהי $p > 2$ ראשוני. תנו דוגמה לפעולה נאמנה של $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ על הקבוצה $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_p$.

פתרון.

א. נבחר את $G = \mathbb{Z}_6$. החבורה G פועלת על $\mathbb{Z}_2$ לפי

$$[g]_6 * [x]_2 = [g+x]_2$$

כאשר $g \in \mathbb{Z}_6$ ו-$x \in \mathbb{Z}_2$. בסימון $[x]_n$ הכוונה למחלקת השקילות של x מודולו n.
בנוסף G פועלת על $\mathbb{Z}_3$ לפי

$$[g]_6 * [x]_3 = [g+x]_3$$

לכן G פועלת גם על $\mathbb{Z}_2 \cup \mathbb{Z}_3$ כאשר אנו מתייחסים למחלקות שקילות מודולו מספרים שונים כאיברים שונים. בפרט $|\mathbb{Z}_2 \cup \mathbb{Z}_3| = 5$, שזר ל-$|G| = 6$. קל לבדוק שלפעולה הזו אין נקודות שבת.

ב. בפועל יש למצוא שיכון $\varphi\colon \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \to S_{2p}$. נסמן שני איברים של S_{2p},

$$\sigma_1 = (1,2,\ldots,p)\,, \qquad \sigma_2 = (p+1, p+2, \ldots, 2p)$$

נתבונן בתת־החבורה $H = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle \le S_{2p}$. היא איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ לפי הגדרת מכפלה ישרה, כי $\langle \sigma_i \rangle$ הן תת־חבורות נורמליות של H מסדר p המקיימות $\langle\sigma_1\rangle \cap \langle\sigma_2\rangle = \{\mathrm{id}\}$. איזומורפיזם מפורש (הוא לא היחיד) ישלח את $(a,b) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ ל-$\sigma_1^a \sigma_2^b$, וזה יגדיר לנו את הפעולה הנאמנה שרצינו.
בפירוט, אפשר לחשוב על איבר $(x,y) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_p$ כמספר $x \cdot p + y \in \mathbb{Z}_{2p}$ כאשר $x \in \{0,1\}$ ו-$y \in \{1,\ldots,p\}$ כשהחיבור הוא מודולו $2p$. באופן מפורש הפעולה שהגדרנו היא

$$\begin{aligned}(a,b)*(x,y) &= \left(\left\lfloor \frac{\sigma_1^a\sigma_2^b(x\cdot p+y)}{p} \right\rfloor \pmod 2,\ \sigma_1^a\sigma_2^b(x\cdot p+y) \pmod p\right) \\ &= \begin{cases}(x, y+a\,(\mathrm{mod} p))\,, & x=0 \\ (x, y+b\,(\mathrm{mod} p))\,, & x=1\end{cases}\end{aligned}$$

ודאו שברור לכם למה זו פעולה (מתבססים על כך שחיבור מודולו p מוגדר היטב), ולמה היא נאמנה (כי $y+a \equiv y \pmod p$ אם ורק אם $a \equiv 0 \pmod p$ וכנ"ל עבור b).

שאלה 8. תהי G חבורה ותהי $N \lhd G$. הפריכו את הטענות השגויות הבאות:

א. אם $K \lhd G$ וגם $N \cong K$, אז $G/N \cong G/K$.

ב. אם $G/N \cong G$, אז $N = \{e_G\}$.

ג. אם N חבורת-2 לא טריוויאלית, וגם G/N חבורת-2 לא טריוויאלית, אז G אבלית.

ד. תת־חבורת הקומוטטורים G' היא אבלית.

פתרון.

א. ראינו בכיתה כי $n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ עבור $n \neq 0$. החבורה $G = \mathbb{Z}$ אבלית, ולכן כל תת־חבורה שלה היא נורמלית. כמו כן ראינו $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$. לכן אם נבחר $N = 2\mathbb{Z}$ ו-$K = 3\mathbb{Z}$ נקבל כי $K \cong N$, אבל המנות $G/N \cong \mathbb{Z}_2$ ו-$G/K \cong \mathbb{Z}_3$ לא איזומורפיות כי הן מסדר שונה.

ב. ברור שחייבים לבחור חבורה אינסופית. הרי אם G סופית ו-$|N| > 1$, אז $|G/N| = |G|\,/\,|N|$ קטן ממש מ-$|G|$. הדרך הנוחה למצוא פתרון היא למצוא אפימורפיזם $f\colon G \to G$ שהוא לא מונומורפיזם. אז הגרעין שלו הוא תת־חבורה נורמלית לא טריוויאלית ולפי משפט האיזומורפיזם הראשון מתקיים $G/\ker f \cong G$.
נבחר $G = \mathbb{C}^*$, ונגדיר אפימורפיזם $f\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ לפי $f(x) = x^2$. ודאו שאתם יודעים להוכיח שזהו אפימורפיזם. הגרעין $\ker f$ איננו טריוויאלי, כי גם $-1 \in \ker f$.
אפשרות אחרת היא $G = \mathbb{R}[x]$, אוסף הפולינומים הממשיים, עם הפעולה של חיבור פולינומים. אפשר לוודא שזו אכן חבורה, ושהיא אבלית. נבחר את אוסף הפולינומים הקבועים $H = \{a_0 : a_0 \in \mathbb{R}\}$. ברור ש-$H \neq \{0\}$ (הפולינום הקבוע 0 הוא איבר היחידה ב-G), אבל מתקיים $G/H \cong G$. נסו למצוא דוגמאות נוספות.

ג. למעשה כל חבורה לא אבלית מסדר 2^n תתאים, ועבורה נבחר את $N = Z(G)$. אפשר לבחור למשל את D_4 או Q (אלו הן האפשרויות היחידות מסדר 8). המרכז של חבורת-2 סופית אינו טריוויאלי, ואם נדרוש שאינה אבלית אז הוא גם לא כל החבורה. המנה של חבורת-2 גם הוא חבורת-2, ובפרט G/N. היא לא טריוויאלית כי N לא טריוויאלית.

ד. אפשר לבחור את $G = S_5$, ואז $G' = A_5$ אינה אבלית. למעשה מספיק להראות כי $(123), (234) \in S_n'$ עבור $n \geq 4$, ואלו איברים שאינם מתחלפים.
דוגמה אחרת $G = GL_2(\mathbb{R})$ ואז $G' = SL_2(\mathbb{R})$ אינה אבלית.

שאלה 9. רמז: מכפלת ראשוניים, או חבורות שכבר הכרנו.

א. תנו דוגמה לחבורה G שיש לה אינסוף תת־חבורות ואינסוף חבורות מנה האיזומורפיות ל-G עצמה.

ב. תנו דוגמה לחבורה אינסופית שאף תת־חבורה ואף חבורת מנה שלה איזומורפיות אליה.

פתרון. בלי הוכחות הפעם, רק הדוגמאות.

א. $G = \mathbb{R}$. העזרו בכך ש-$\mathbb{R}$ היא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{Q}$ עם בסיס מעוצמה א, ולכן $\mathbb{R} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (כחבורות! לא כחוגים).

ב. $G = \prod_p \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \dots$ כאשר המכפלה היא על כל הראשוניים. אפשר לקחת גם את הסכום הישר.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 10. תהי G חבורה מסדר n. הוכיחו כי השיכון $G \to S_n$ ממשפט קיילי אינו שיכון לתוך A_n אם ורק אם תת־חבורה 2-סילו של G היא ציקלית לא טריוויאלית. רמז: העזרו בשאלה 3.

שאלה 11. חבורה G תקרא מטא-אבלית אם יש לה תת־חבורה נורמלית $N \lhd G$ כך שגם N אבלית וגם G/N אבלית. רמז כללי: נסו להשתמש במשפטי האיזומורפיזמים.

א. הוכיחו שחבורה G היא מטא-אבלית אם ורק אם G' היא אבלית (כלומר כל שני קומוטטורים של איברי G מתחלפים).

ב. הוכיחו שכל תת־חבורה של חבורה מטא-אבלית היא גם מטא-אבלית.

ג. הוכיחו שכל חבורת מנה של חבורה מטא-אבלית היא גם מטא-אבלית.

בהצלחה!