שיעור (סדר) התכנסות

הגדרה

תהא $\{x_n | n \geq 0\}$ סדרת ערכים איטרטיביים. הסדרה מתכנסת(מסדר $p \geq 1$) לנקודה r אם

$$|r - x_{n+1}| \leq c \cdot |r - x_n|^p$$

עבור c כלשהו חיובי. עבור $p = 1$ הסדרה מתכנסת באופן ליאנרי(במקרה זה הכרחי ש$c \leq 1$(למעשה $c < 1$)). הקבוע c נקרא אז שיעור ההתכנסות הלינארית.

התכנסות לינארית פירושה שהשגיאה בכל איטרציה שואפת לחלק יחסי קבוע של שגיאת האיטרציה הקודמת.

הערה

אם יש התכנסות לינארית, אז $\frac{|r - x_{n+1}|}{|r - x_n|} \to c$. בד"כ r לא ידוע מראש, אבל אפשר למצוא קירוב לשיעור ההתכנסות באמצעות

$$\frac{|r - x_{n+1}|}{|r - x_n|} \approx \frac{|x_{n+1} - x_n|}{|x_n - x_{n-1}|}$$

התכנסות עבור fixed point

הערה חשובה!!!

לא להתבלבל בין f לg!

עבור $x_{n+1} = g(x)$ נכתוב $r - x_n = r - g(x_n) = g(r) - g(x_n)$ באשר r הוא השורש האמיתי, כלומר $r = g(r)$.

$$r - x_{n+1} = \frac{g(r) - g(x_n)}{(r - x_n)} \cdot (2 - x_n)$$

ולפי משפט ערך הביניים

$$r - x_{n+1} = g'(\xi_n) \cdot (z - x_n)$$

עבור $\xi_n \in [r, x_n]$ כלשהי. ז"א

$$|e_{n+1}| = g'(\xi_n) \cdot |e_n|$$

לכן אם $|g'(\xi_n)| \leq k < 1$ עבור אינטרבל נתון בקרבת השומש, אזי עבור ערך התחלתי x_0 באינטרבל שיטת נקודות השבת תתכנס בוודאות.

משפט

תהא $g\left(x\right)$ גזירה p פעמים לכל x בסביבה כלשהי של r, באשר r הוא שורש המשוואה $x=g\left(x\right)$, ($p\geq 2$).

אם $g'\left(r\right)=g''\left(r\right)=\cdots=g^{(p-1)}\left(r\right)=0$ אזי עבור x_0 מספיק קרוב לr, שיטת FPI תתכנס מסדר p.

הערה

אם $g'\left(r\right)=0$ אז ההתכנסות לינארית.

הוכחה

משתמשים בטור טיילור סביב השורש r:

$$x_{n+1}=g\left(x_n\right)=g\left(r\right)+\left(x_n-r\right)g'\left(r\right)+\cdots+\frac{\left(x_n-r\right)^{p-1}}{(p-1)!}g^{(p-1)}\left(2\right)+\frac{\left(x_n-r\right)^{p}}{p!}g^{(p)}\left(\xi_n\right)$$

עבור ξ_n בין x_n וr. אבל $r=g\left(r\right)$ ו$g^{(n)}\left(r\right)=0$ עבור $1\leq n<p$, לכן:

$$\cancel{g\left(x_n\right)}=\cancel{g\left(r\right)}+\cancel{\left(x_n-r\right)g'\left(r\right)}+\cdots+\xcancel{\frac{\left(x_n-r\right)^{p-1}}{(p-1)!}g^{(p-1)}}\left(r\right)+\frac{\left(x_n-r\right)^{p}}{p!}g^{(p)}\left(\xi_n\right)$$

$$r-x_{n+1}=\frac{\left(x_n-r\right)^{p}}{p!}g^{(p)}\left(\xi_n\right)$$

אבל $\left(x_n-r\right)\to 0$ ולכן ההתכנסות מסדר p.

התכנסות עבור שיטת ניוטון

תזכורת - $x_{n+1}=x_n-\frac{f\left(x_n\right)}{f'\left(x_n\right)}$, ואז $f\left(x_n\right)=0 \Leftrightarrow x_{n+1}=x_n$ - ולכן זה שקול למקרה פרטי של שיטת FPI עם $g\left(x\right)\equiv x-\frac{f\left(x\right)}{f'\left(x\right)}$.

מכיוון שזו שיטת FPI, נרצה להראות $g'\left(r\right)=0$, ואז לפי המשפט סדר ההתכנסות לפחות 2.

$$g'\left(x\right)=1-\frac{\left(f'\left(x\right)\right)^2-f\left(x\right)f''\left(x\right)}{\left(f'\left(x\right)\right)^2}=\frac{f\left(x\right)f''\left(x\right)}{\left(f'\left(x\right)\right)^2}$$

אבל $f\left(r\right)=0$, ולכן

$$g'\left(r\right)=\frac{f\left(r\right)f''\left(r\right)}{\left(f'\left(r\right)\right)^2}=\frac{0\cdot f''\left(r\right)}{\left(f'\left(r\right)\right)^2}=0$$

זה קורה רק כשהפונקציה אכן מתכנסת - כלומר כאשר

$$\left|\frac{f(x)\,f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}\right| < 1$$

הוכחה אלטרנטיבית

אפשר גם לפתח ישירות טור טיילור של $f(x)$ סביב x_n:

$$f(X) = f(x_n) + (x - x_n)\,f'(x_n) + \frac{(x - x_n)^2}{2} f''(\xi)$$

עבור ξ מסויים בין x וx_n. עבור $x = r$:

$$f(r) = 0 = f(x_n) + (r - x_n)\,f'(x_n) + \frac{(r - x_n)^2}{2} f''(\xi_n)$$

עבור ξ בין r וx_n, ולכן

$$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (r - x_n) + \frac{(r - x_n)^2}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)} = 0$$

$$r = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{(r - x_n)^2}{2}\frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}$$

כלומר

$$r - x_n = -\frac{(r - x_n)^2}{2} \cdot \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}$$

וההתכנסות ריבועית!

עבור אינטרבל נתון I בקרבת השורש נגזור:

$$M = \frac{\max_{x\in I}|f''(x)|}{\min_{x\in I}|f'(x)|}$$

[נשים לב: $g''(x) = \frac{f''(x)}{f'(x)}$]

ניתן לראות כי למעשה[1]

$$|e_n| \le \frac{1}{M}\left(M \cdot |e_0|\right)^{2^n}$$

כך שלהבטחת ההתכנסות x_0 צריך לקיים

$$|r - x_0| < \frac{1}{M}$$

[1] e_n זה השגיאה בשלב הn

ריבוי שורשים

לפעמים לשורש יש ריבוי גדול מ1, למשל:

$$f\left(x\right)=\left(x+1\right)^{3}\qquad f\left(x\right)=\left(x-r\right)^{2}$$

זה לא חייב להיות דווקא פולינום:

$$f\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(e^{x-1}-1\right)$$

כאשר יש ריבוי שורשים, הפונקציה נעשית שטוחה באזור השורש, וזה עושה בעיה בהתכנסות:

אי ישימות

חלק מהשיטות לא בהכרח ישימות בסביבת השורש.

אובדן יעילות

חלק מהשיטות פחות יעילות, כלומר ההתכנסות פחות מהירה.

הסבר אנליטי

עבור רושר בעל ריבוי $k>1$, ניתן לכתוב

$$f\left(x\right)=\left(x-r\right)^{k}\cdot h\left(x\right)$$

עבור $h\left(r\right)\neq0$ ו$h\left(x\right)$ רציף בr. קל לראות כי

$$0=f\left(r\right)=f'\left(r\right)=f''\left(r\right)=\cdots=f^{(k-1)}\left(r\right)=0\qquad f^{(k)}\neq0$$

עבור שיטת ניוטון:

$$g\left(x\right)=x-\frac{f\left(x\right)}{f'\left(x\right)}$$

$$f'\left(x\right)=k\left(x-r\right)^{k-1}h\left(x\right)+\left(x-r\right)^{k}h'\left(x\right)$$

$$g\left(x\right)=x-\frac{\left(x-r\right)\cdot h\left(x\right)}{kh\left(x\right)+\left(x-r\right)\cdot h'\left(x\right)}$$

$$g'\left(x\right)=1-\frac{h\left(x\right)}{R\cdot h\left(x\right)+\left(x-r\right)h'\left(x\right)}-\left(x-r\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{h\left(x\right)}{R\cdot h\left(x\right)+\left(x-r\right)\cdot h'\left(x\right)}\right]$$

$$g'(r) = 1 - \frac{\cancel{h(r)}}{R\cdot \cancel{h(r)} + \cancel{(r-r)h'(r)}} - \cancel{(r-r)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{h(r)}{R\cdot h(r)+(r-r)\cdot h'(r)}\right]}$$

$$g'(r) = 1 - \frac{1}{R} \neq 0$$

תיקון השיטה

נרצה פונקציה $g(x)$ שעבור $g'(r)=0$.
נגדיר פונקציה

$$K(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{(x-r)\,h(x)}{k\cdot h(x) + (x-r)\cdot h'(x)}$$

$$K'(r) = \frac{1}{R}m = 0$$

וברור כי $K(2)=0$ וכי 2 הוא שורש פשוט במקרה זה!

החסרון: יש צורך בחישוב נגזרות מסדר גבוה יותר ב1(ביחס לשיטות המקוריות)