פתרון תרגיל בית 5 במבנים אלגבריים
89-214 סמסטר א׳ תשפ״ג

שאלה 1 (חימום)**.** תהי תמורה $\sigma \in S_9$ המוגדרת לפי $\sigma(i) = 10 - i$. כתבו את σ כטבלה, כמכפלת מחזורים זרים ומצאו את הסימן שלה.

פתרון. הכתיבה כטבלה היא קלה מאוד:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

עבור מכפלת מחזורים זרים, צריך להזכר בשיטה מהכיתה ולקבל $\sigma = (19)(28)(37)(46)$. זו תמורה שהיא מכפלה של ארבע חילופים ולכן $\mathrm{sign}(\sigma) = 1$, כלומר היא תמורה זוגית.

שאלה 2. תהי G חבורה ותהינה $H, K \le G$ תת־חבורות שלה.

א. יהי p מספר ראשוני. הוכיחו שאם $|H| = |K| = p$, אז $H = K$ או $H \cap K = \{e\}$.

ב. הוכיחו שאם $|H| = 1000$ ו-$|K| = 77$, אז $H \cap K = \{e\}$.

פתרון.

א. איבר היחידה שייך לכל תת־חבורה, ובפרט לתת־החבורה $H \cap K$. אם $H \cap K = \{e\}$, אז סיימנו. אחרת, קיים איבר $e \neq x \in H \cap K$ כלשהו. לכן $o(x) > 1$. אנחנו יודעים כי $o(x)$ מחלק את $|H|$ ואת $|K|$, ולכן בהכרח $o(x) = p$. כלומר $|\langle x \rangle| = p$ ומפני ש-H, K הן חבורות אז הן סגורות לפעולה ונסיק $\langle x \rangle \subseteq H, K$. מהנתון $|H| = |K| = p$ נקבל $H = \langle x \rangle = K$ כי ב-$\langle x \rangle$ יש בדיוק p איברים שונים.

ב. ידוע לנו כי $H \cap K$ היא תת־חבורה של H ושל K. לכן לפי משפט לגראנז׳ מתקיים כי $|H \cap K|$ מחלק את $|H|$ ואת $|K|$. לפי הנתון על הסדרים של תת־החבורות, צריך למצוא מספר שמחלק גם את $1000 = 2^3 \cdot 5^3$ וגם את $77 = 7 \cdot 11$. אך המספר הגדול ביותר שעושה זאת הוא 1. לכן $|H \cap K| \le 1$. אבל תמיד $|H \cap K| \ge 1$ כי איבר היחידה שייך לכל תת־חבורה (בפרט לחיתוך $H \cap K$), ולכן קיבלנו כי $H \cap K = \{e\}$.

שאלה 3. יהי p ראשוני קבוע, ותהינה G, H חבורות. חבורה נקראת חבורת-p, אם הסדר של כל איבר בה הוא חזקה של p (כלומר מן הצורה p^i עבור $i \ge 0$ כלשהו התלוי באיבר).

א. יהי $f\colon G \to H$ הומומורפיזם. הוכיחו שאם G היא חבורת-p, אז $\operatorname{im} f$ חבורת-p.

ב. נניח $H \cong G$. הסיקו כי G היא חבורת-p אם ורק אם H היא חבורת-p.

ג. הפריכו את הכיוון ההפוך לסעיף הראשון: אם $\operatorname{im} f$ היא חבורת-p, אז G היא חבורת-p.

פתרון. כהערת אגב, אם G חבורה סופית, אז היא חבורת-p אם ורק אם היא מסדר חזקה של p.

א. לכל $h \in \operatorname{im} f$ קיים $g \in G$ כך ש-$h = f(g)$. לפי תרגיל שעשינו בכיתה $o(f(g))|o(g)$ ולפי הנתון $o(g)$ הוא חזקה של p. לכן גם הסדר של $f(g)$ הוא חזקה של p, כי הוא מחלק חזקה של p. זה נכון לכל איבר של $\operatorname{im} f$ שהוכחנו בעבר שהיא חבורה, ולכן $\operatorname{im} f$ היא חבורת-p.

ב. אם חבורות הן איזומורפיות, אז יש בינהן איזומורפיזם. נניח $\phi\colon G \to H$ הוא איזומורפיזם. לכן ϕ הוא על, כלומר $H = \operatorname{im}\phi$. אם G היא חבורת-p, אז גם H היא חבורת-p לפי הסעיף הקודם. באופן דומה יש איזומורפיזם $\psi\colon H \to G$, כי איזומורפיות היא תכונה סימטרית. לכן אם H חבורת-p, אז גם G חבורת-p (היינו יכולים לבחור $\psi = \phi^{-1}$ כי הזכרנו שהפונקציה ההופכית של איזומורפיזם היא איזומורפיזם, אבל אם לא פתרתם את התרגיל הזה אז צריך להוסיף הוכחה לכך).

ג. כדי להפריך חייבים לבחור עבור G חבורה שאינה חבורת-p. אפשר לבחור את ההומומורפיזם הטריוויאלי עבור חבורות מתאימות, אבל ננסה משהו אחר. נבחר $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ואת $H = \mathbb{Z}_3$. עבור ההומומורפיזם נבחר את ההטלה $f\colon G \to H$ לפי $f((a, b)) = b$. התמונה היא חבורת-3, למעשה $\operatorname{im} f = H$. אבל G מסדר 6, שהוא זוגי, ולכן קיים בה איבר מסדר 2 שאינו חזקה של 3 (למשל האיבר $(1, 0)$ הוא מסדר 2). אפשר גם להפריך עם זה שיש ב-G איבר מסדר 6, כמו $(1, 1)$, ובוודאי ש-6 אינו חזקה של ראשוני.
בשאלה הזו חשוב לכתוב את ההומומורפיזם, לחשב את התמונה שלו, להוכיח שהיא חבורת-p וגם ש-G אינה חבורת-p.

שאלה 4. יהי $n \in \mathbb{N}$, ותהי G חבורה. נגדיר פונקציות $f_n\colon G \to G$ לפי $f_n(g) = g^n$.

א. הוכיחו שהפונקציה f_2 היא הומומורפיזם אם ורק אם G אבלית.

ב. מצאו חבורה G לא אבלית עבורה f_{12} היא הומומורפיזם. הוכיחו זאת וחשבו את $|\ker f_{12}|$ ו-$|\operatorname{im} f_{12}|$. האם לחבורה שמצאתם f_4 היא הומומורפיזם? האם f_6?
רמז: מסקנה ממשפט לגראנז' יכולה לעזור בבחירת G.

פתרון.

א. הוכחתם את הטענה הזו בשפה אחרת בתרגיל הבית הראשון! בכיוון אחד, נניח שהחבורה G אבלית. יהיו $g, h \in G$ כלשהם. לכן

$$f_2(gh) = (gh)^2 = ghgh \underbrace{=}_{\text{אבליות}} gghh = g^2h^2 = f_2(g)f_2(h)$$

ולכן f_2 הומומורפיזם. בכיוון השני, נניח ש-f_2 הומומורפיזם. לכל $g, h \in G$ התמונה של gh היא

$$f_2(gh) = (gh)^2 = ghgh$$

וגם

$$ghgh = f_2(gh) = f_2(g)f_2(h) = g^2h^2$$

כי f_2 הומומורפיזם. כלומר $ghgh = gghh$. נצמצם ונקבל $hg = gh$, ומפני שזה נכון לכל זוג איברים נסיק כי G אבלית.

ב. יש המון אפשרויות כאן. כל חבורה ממעריך המחלק את 12, או מכפלה ישרה של חבורה אבלית עם חבורה כזו תתאים. אנחנו נבחר את $G = A_4$ (או את $A_4 \times H$ לכל חבורה אבלית H כאמור). מפני ש-$|A_4| = 12$ לפי תרגילים קודמים, אז כמסקנה מלגראנז' נקבל כי $f_{12}(\sigma) = \sigma^{12} = \mathrm{id}$ לכל $\sigma \in A_4$. לכן f_{12} במקרה של A_4 היא ההומומורפיזם הטריוויאלי. בפרט $\operatorname{im} f_{12} = \{\mathrm{id}\}$ ו-$\ker f_{12} = A_4$. לכן $|\operatorname{im} f_{12}| = 1$ ו-$|\ker f_{12}| = 12$.
בבחירה הזו f_4 אינה הומומורפיזם, אבל f_6 כן.

שאלה 5. תהי G חבורה. נסמן את קבוצת האוטומורפיזמים של G בסימון $\mathrm{Aut}(G)$.

א. הוכיחו כי $\mathrm{Aut}(G)$ היא חבורה ביחס לפעולה של הרכבת פונקציות.

ב. (אתגר) מצאו את כל איברי $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_8)$ במפורש והוכיחו שהיא לא ציקלית. רמז: החבורה $\mathbb{Z}_8$ ציקלית.

פתרון.

א. ידוע לנו מהקורס במתמטיקה בדידה כי הרכבה של פונקציות היא קיבוצית, ולכן הפעולה קיבוצית. בנוסף למדנו שהרכבה של פונקציות חח"ע ועל היא פונקציה חח"ע ועל. הרכבה של הומומורפיזמים היא הומומורפיזם, כמו בשאלה הראשונה, ולכן הרכבה של אוטומורפיזמים היא אוטומורפיזם. בנוסף, בהנתן אוטומורפיזם $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$, אז גם הפונקציה ההופכית φ^{-1} היא אוטומורפיזם (ברור ש-φ^{-1} היא חח"ע ועל, אבל כדי להוכיח שהיא גם הומומורפיזם צריך לפתור את השאלה שניתנה לבית בתרגול בנושא), ולכן יש סגירות להופכי. איבר היחידה בחבורה הזו הוא העתקת הזהות id_G כי זהו אוטומורפיזם (כמו שהזכרנו בכיתה) והרכבה של כל אוטומורפיזם איתה

$$\varphi \circ \mathrm{id}_G = \mathrm{id}_G \circ \varphi = \varphi$$

מראה שמדובר באיבר היחידה. בסך הכל $\mathrm{Aut}(G)$ היא חבורה לגבי פעולת ההרכבה. אם מישהו הוכיח כי $\mathrm{Aut}(G) \leq S_G$ ולכן $\mathrm{Aut}(G)$ היא חבורה, זה יותר יפה.

ב. היה לנו תרגיל בכיתה שלכל הומומורפיזם $f\colon G \to H$ כאשר G היא ציקלית, אז גם $\mathrm{im}\, f$ היא ציקלית. במהלך ההוכחה ראינו כי $\mathrm{im}\, f = \langle f(a) \rangle$ כאשר a הוא יוצר של G. אנחנו מחפשים את כל האוטומורפיזמים $\varphi\colon G \to G$ כאשר $G = \mathbb{Z}_8$ היא חבורה ציקלית עם יוצר 1 (למשל).
מפני שכל אוטומורפיזם שומר על הסדר של האיברים, חובה לשלוח את 1 ליוצר כלשהו של $\mathbb{Z}_8$. אלי גם הספקנו לראות שלחבורה ציקלית מסדר 8 יש $\varphi(8) = 4$ יוצרים. צריך לבדוק שכאשר מגדירים הומומורפיזם בעזרת התמונה של 1 באמת מקבלים ארבע אוטומורפיזמים שונים. היוצרים של $\mathbb{Z}_8$ כחבורה ציקלית הם $\{1,3,5,7\}$. לכן נגדיר את ההעתקות

$$\begin{aligned} \varphi_a\colon \mathbb{Z}_8 &\to \mathbb{Z}_8 \\ x &\mapsto ax \end{aligned}$$

לכל $a \in \{1,3,5,7\}$. וודאו שאכן מדובר באוטומורפיזמים שונים. מכאן זה לא קשה להוכיח כי

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_8) \cong U_8 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

שהרי U_8 היא חבורה אבלית מסדר 4 והיא לא ציקלית (למשל כי הסדר של כל איבר הוא 1 או 2) לפי חישוב ישיר שצריך להראות.

שאלה 6. יהי n מספר טבעי.

א. (חימום) הוכיחו כי אוסף כל התמורות הזוגיות A_n הוא תת־חבורה של S_n.

ב. (יותר קשה) הוכיחו כי החבורה S_n איזומורפית לתת־חבורה של A_{n+2}.

פתרון.

א. ברור כי $\mathrm{id} \in A_n$ לפי החישוב בכיתה, ולכן $A_n \neq \varnothing$. ראינו כי הסימן כפלי. לכן אם $\sigma, \tau \in A_n$, אז

$$\mathrm{sign}(\sigma\tau) = \mathrm{sign}(\sigma) \cdot \mathrm{sign}(\tau) = 1 \cdot 1$$

ולכן $\sigma\tau \in A_n$. כלומר A_n סגורה לפעולה. בתרגיל בית קודם ראינו שאם תת־קבוצה לא ריקה של פעולה סגורה לפעולה, אז היא גם סגורה להופכי. ניתן להוכיח זאת בעוד הרבה דרכים שונות, ובכל מקרה קיבלנו כי $A_n \leq S_n$.
דרך מהירה יותר: ראינו בכיתה כי פונקציית הסימן $\operatorname{sign}\colon S_n \to \{\pm 1\}$ היא הומומורפיזם, וגם שהגרעין של כל הומומורפיזם הוא תת־חבורה של המקור. לפי הגדרת גרעין $A_n = \ker(\operatorname{sign})$ ולכן היא תת־חבורה של S_n.

ב. לחבורה A_{n+2} יש הרבה תת־חבורות שאיזומורפיות ל-S_n. אנחנו נציג שיכון יחסית טבעי של S_n ל-A_{n+2} והתמונה של השיכון הזה תהיה תת־חבורה האיזומורפית ל-S_{n+2}.
אפשר לשכן את S_n ב-S_{n+2} באופן די פשוט. נגדיר פונקציה $f\colon S_n \to S_{n+2}$ לפי $f(\sigma) = \hat{\sigma}$ כאשר

$$\hat{\sigma}(i) = \begin{cases} \sigma(i) & 1 \leq i \leq n \\ i & n+1 \leq i \leq n+2 \end{cases}$$

כלומר שולחים את σ לתמורה שהיא "דומה" לה, אבל מפני שהאיברים של S_{n+2} הם פונקציות מהקבוצה $\{1, \ldots, n+2\}$ לעצמה, צריך לומר לאן $n+1$ ו-$n+2$ עוברים.
כמובן שצריך להוכיח שהפונקציה הזו היא שיכון.
שימו לב כי $S_n \cap A_{n+2} = \varnothing$ לפי הדרך שבה הגדרנו פונקציות בבדידה.
הבעיה היא ש-$\operatorname{im} f$ לא מוכלת ב-A_{n+2}. כל תמורה אי זוגית ב-S_n נשלחת לתמורה אי זוגית ב-S_{n+2}. נתקן זאת על ידי הגדרת פונקציה נוספת

$$\begin{aligned} \varphi\colon S_n &\to A_{n+2} \\ \sigma &\mapsto \hat{\sigma} \cdot (n+1, n+2)^{(1-\operatorname{sign}(\sigma))/2} \end{aligned}$$

כלומר אם התמורה σ היא זוגית היא נשלחת ל-$\hat{\sigma}$, ואם היא אי זוגית היא נשלחת לתמורה $\hat{\sigma} \cdot (n+1, n+2)$ שהיא זוגית כי היא מכפלה של חילוף עם תמורה אי זוגית.
כעת נשאר להוכיח ש-φ היא שיכון. כלומר יש להוכיח שהיא גם הומומורפיזם (דורש לדעת שהחילוף $(n+1, n+2)$ מתחלף עם איברי $f(S_n)$) וגם חח"ע (אם יודעים שהיא הומומורפיזם ושהיא הזהות על A_n, אז נשאר מעט להוכיח). נקבל כי $\operatorname{im} \varphi \cong S_n$ וידוע לנו ש-$\operatorname{im} \varphi \leq A_{n+2}$, אז זו תת־החבורה הדרושה.

שאלה 7. מצאו תנאי על n כך שלחבורה $\mathbb{Z}_n$ יהיו בדיוק שתי תת־חבורות.
קצת יותר קשה: מהו התנאי על n כך שיהיו בדיוק שלוש תת־חבורות? בדיוק ארבע תת־חבורות? הוכיחו את קביעותיכם.

פתרון. לחבורה $\mathbb{Z}_n$ יש בדיוק שתי תת־חבורות אם ורק אם n ראשוני.
לחבורה $\mathbb{Z}_n$ יש בדיוק שלוש תת־חבורות אם ורק אם $n = p^2$ כאשר p ראשוני.
לחבורה $\mathbb{Z}_n$ יש בדיוק ארבע תת־חבורות אם ורק אם $n = p^3$ כאשר p ראשוני או $n = pq$ כאשר q ראשוני ששונה מ-p.
העשרה: באופן יותר כללי, מספר תת־החבורות של $\mathbb{Z}_n$ שווה למספר המחלקים של n. יש אפילו איזומורפיזם של סריגים, בין סריג תת־החבורות של $\mathbb{Z}_n$ לפי הכלה לבין סריג המחלקים של n לפי חלוקה.

שאלה 8 (אתגר). תהי G חבורה ונתבונן בפונקציות $f(x) = x^3$, $g(x) = x^4$ ו-$h(x) = x^5$ מהחבורה לעצמה. הוכיחו שהפונקציות האלו הן הומומורפיזמים (כולן יחד) אם ורק אם G אבלית.

בהצלחה!