תרגיל בית מספר 1

<u>תאריכי הגשה: הקבוצה של לואי 7.11; הקבוצה של מני 6.11</u>

1. הוכיחו את התכונות הבאות של המספרים המרוכבים z, z_1, z_2:
   א. $\mathrm{Re}(z_1+z_2)=\mathrm{Re}(z_1)+\mathrm{Re}(z_2)$, וכנ"ל עבור Im.
   ב. זהות המקבילית: $|z_1-z_2|^2+|z_1+z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$. מהי המשמעות הגיאומטרית?
2. פתרו את המשוואה: $z^4+2+2\sqrt{3}\cdot i=0$
3. חשבו את הביטוי: $\dfrac{(1+i)^{n+2}}{(1-i)^n}$
4. מצאו $z=n+mi$, n,m שלמים כך שמתקיים: $z^3=2+11i$ (רמז: היעזרו בנתון ש-n,m שלמים)
5. יהא $n\geq 2$ טבעי, ויהא P אוסף שורשי היחידה מסדר n.
   א. הוכיחו שקיים $z\in P$ (כלומר קיים שורש יחידה) כך ש-$P=\left\{1,z,z^2,\ldots,z^{n-1}\right\}$
   ב. הראו שסכום איברי P הוא אפס. (רמז: סדרה הנדסית)

   [תזכורת: $z\in\mathbb{C}$ הוא שורש יחידה מסדר n אם $z^n=1$]
6. תהא נתונה המשוואה $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0=0$ וידוע כי a_i ממשיים לכל $0\leq i\leq n$. הוכיחו שאם z הוא פתרון של המשוואה, אזי גם $\bar{z}$ (הצמוד המרוכב) הוא פתרון שלה.
7. הוכיחו את הזהות: $\sin(3\theta)=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta$ (בשימוש משפט דה-מואבר).

בהצלחה!