שאלה 1

תהי G חבורה מסדר 45.

א. הוכח כי G נילפוטנטית.

ב. הוכח או הפרך: G בהכרח אבלית.

תשובה:

א) נשים לב כי $|G|=45=3^2\cdot 5$. לפי משפט סילו 3,

$n_3\in\{1,5\} \Leftarrow n_3 | 5$. אך גם $n_3\equiv 1 \bmod 3 \Leftarrow n_3=1$.

$n_5\in\{1,3,9\} \Leftarrow n_5 | 9$. אך גם $n_5\equiv 1 \bmod 5 \Leftarrow n_5=1$.

לכן תת-חבורות 3-סילו ו-5-סילו של G יחידות ולכן נורמליות. הוכחנו שכל חבורה שכל ת"ח סילו שלה נורמלית הינה נילפוטנטית.

ב) תהיינה P,Q ת"ח 3-סילו ו-5-סילו של G, בהתאמה. הוכחנו בהרצ שכל חבורה נילפוטנטית סופית הינה מכפלה ישרה של ת"ח סילו שלה.

לכן $G\simeq P\times Q$.

אך $|P|=5$, לכן $P\simeq \mathbb{Z}_5$ כי 5 ראשוני, לכן P אבלית.

ואילו $|Q|=9=3^2$, הוכחנו שכל חבורה מסדר ריבוע של ראשוני הינה אבלית. לכן P,Q שתיהן אבליות. G מכפלה ישרה של שני חבורות אבליות, לכן גם אבלית.

<u>הערה</u> סטודנטים רבים לא ציטטו את המשפט על חבורות נילפוטנטיות בסעיף ב), אלא הוכיחו על ידי קריטריון מן הבוחן כי $G\simeq P\times Q$. זו עבודה נוספת מיותרת, אבל כל תשובה נכונה התקבלה ברצון.

Scanned by CamScanner

שאלה 2

א. תהי G חבורה שפועלת על הקבוצה A. יהי $a \in A$, ויהי $H = \mathrm{stab}(a)$. הוכח כי $\mathrm{stab}(g*a) = gHg^{-1}$ לכל $g \in G$.

ב. הוכח שהקבוצות

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) : a+b+c = d+e+f = g+h+k = 1 \right\}$$

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ g & h & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R}) \right\}$$

הינן תת־חבורות של $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ ושהן צמודות זו לזו.

רמז: מי שעושה חישובים מסובכים עם מטריצות עובד קשה מדי.

תשובה: א) נוכיח שני הכלות.

$\mathrm{stab}(g*a) \subseteq gHg^{-1}$: יהי $h \in \mathrm{stab}(g*a)$. אזי $h*(g*a) = g*a$ לכן

$$(g^{-1}hg)*a = g^{-1}*(h*(g*a)) = g^{-1}*(g*a) = a$$

כלומר $g^{-1}hg \in H$, לכן $h \in gHg^{-1}$, אך $h \in \mathrm{stab}(g*a)$ היה שרירותי.

לכן $\mathrm{stab}(g*a) \subseteq gHg^{-1}$.

$gHg^{-1} \subseteq \mathrm{stab}(g*a)$: יהי $h \in H$. אזי

$$(g*h*g^{-1})*(g*a) = ghg^{-1}g*a = gh*a = g*(h*a) \underset{h\in \mathrm{stab}(a)}{=} g*a.$$

לכן $ghg^{-1} \in \mathrm{stab}(g*a)$ אזי הוכחנו את ההכלה השניה, וסך הכל קיבלנו

$\mathrm{stab}(g*a) = gHg^{-1}$.

ב) נבחין בפעולה הרגילה של $G = GL_3(\mathbb{R})$ על $A = \mathbb{R}^3$ הנתונה ע"י $M*v = Mv$, כאשר $M \in GL_3(\mathbb{R})$, $v \in \mathbb{R}^3$. יהי $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} \in G$. אזי

$$M \in H \iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+c \\ d+e+f \\ g+h+k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff M \in \mathrm{stab}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

כמו כן, $M \in \mathrm{stab}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \iff \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ f \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \iff c=f=0,\ k=1 \iff$

$M \in K$.

אז קיבלנו כי $H=stab\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$, $K=stab\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$. כיוון שכל מייצב של איבר של A הינו תת-חבורה של G, מקבלים כי $H,K\le G$. נשאר להוכיח שהן צמודות.

יהי $M=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\in G$. אזי $M\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ (כמובן, יש הרבה מטריצות אחרות ב-G עם התכונה הזאת). לפי סעיף א),

$$H=stab\left(M*\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=M\left(stab\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)M^{-1}=M\cdot K\cdot M^{-1}.$$

<u>הערה</u> אפשר גם להוכיח ישירות כי H,K תת-חבורות של $GL_3(\mathbb{R})$ על ידי בדיקת הסגירות תחת כפל והפכים. אחר כך צריך לחפש איבר של G שמצמיד אחת מן החבורות האלה לשניה. זה תרגיל ארוך ומעצבן, ואף אחד מן הנבחנים לא הצליח להוכיח בדרך הזאת את כל הדברים הנדרשים.

Scanned by CamScanner

שאלה 3

לכל זוג של חבורות, קבע האם הן איזומורפיות:

א. **החבורה $\mathbb{R}$ עם פעולת החיבור והחבורה $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ עם פעולת הכפל.**

ב. **החבורה $\mathbb{C}$ והחבורה $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, שתיהן עם פעולת החיבור.**

ג. **החבורה $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ והחבורה $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$, שתיהן עם פעולת החיבור.**

תשובה: א) יהי $x \in \mathbb{R}$. אם $x^n = e = 0$, אז $x=0 \Leftarrow \underbrace{x+x+x+\dots+x}_{n \text{ פעמים}} = 0$.

כלומר, בחבורה $\mathbb{R}$ אין איברים לא טריוויאליים מסדר סופי. אבל בחבורה $\mathbb{R}^*$ הם כן קיימים: $(-1)^2=1$. אז לא יתכן שהחבורות האלה איזומורפיות.

ב) נגדיר העתקה $f: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, אזי $f((x,y)) = x+iy$

$$f((x_1,y_1)) + f((x_2,y_2)) = (x_1+iy_1)+(x_2+iy_2) = (x_1+x_2)+i(y_1+y_2) = f((x_1+x_2, y_1+y_2))$$

ולכן f הומומורפיזם.

לכל $z \in \mathbb{C}$, $f((\mathrm{Re}\, z, \mathrm{Im}\, z)) = z$ ולכן f על.

בנוסף, $(x,y) \in \ker f \Leftarrow x+iy=0 \Leftarrow x=y=0$. לכן $\ker f = \{e_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\}$,

כלומר f חד-חד-ערכי. לכן f איזומורפיזם.

ג) לכל איבר של $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ יש סדר סופי. אכן, $(\frac{m}{n}+\mathbb{Z})^n = m+\mathbb{Z} = \mathbb{Z} = e_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$ ולכן $n \,|\, o(\frac{m}{n}+\mathbb{Z})$. לעומת זאת, ב-$\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ אין שום איבר לא-טריוויאלי מסדר סופי. אכן, אם $(r+\mathbb{Q})^n = e_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}$, כאשר $r \in \mathbb{R}$, אזי $nr = q \in \mathbb{Q}$, מה שאומר כי $r = \frac{q}{n} \in \mathbb{Q}$. ולכן $r+\mathbb{Q} = \mathbb{Q} = e_{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}$. כיוון שאיזומורפיזמים שומרים את הסדר של איברים, לא יתכן שקיים איזומורפיזם בין $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ל-$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

<u>פתרון אחר</u> נשים לב כי $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ אינסופי, כי כל מספר רציונלי בקטע $[0,1)$ נמצא בקוסט שונה, ויש אינסוף מספרים כאלה. מצד שני, ההטלה הטבעית $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ הינה על. לכן $|\mathbb{Q}/\mathbb{Z}| \le |\mathbb{Q}| = \aleph_0$. מסיקים כי $\aleph_0 = |\mathbb{Q}/\mathbb{Z}|$.

נניח בשלילה כי $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \cong \mathbb{R}/\mathbb{Q}$! אזי $\aleph_0 = |\mathbb{R}/\mathbb{Q}|$, כלומר ב-$\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ יש $\aleph_0$ קוסטים. בכל קוסט נמצאים $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$ איברים של $\mathbb{R}$. אז סך הכל ב-$\mathbb{R}$ יש $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ איברים. אבל ידוע לפי האלכסון של קנטור כי $\mathbb{R}$ לא בת מניה. הגענו לסתירה, לכן $\mathbb{R}/\mathbb{Q} \ncong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

שאלה 4

תהי $H = \{\sigma \in A_6 : \sigma(6) = 6\} \le A_6$.

א. הוכח כי $H \simeq A_5$.

ב. מהו $N_{A_6}(H)$?

תשובה: א) יהי $\sigma \in A_5$ ונציג אותה כ- $\sigma = \tau_1\tau_2\cdots\tau_r$, כאשר $\tau_1,\dots,\tau_r$ מחזורים זרים. נגדיר העתקה $f: A_5 \to H$ על ידי $f(\sigma) = \tau_1\cdots\tau_r\cdot(6)$.

לא ברור מאליו כי $f(\sigma)\in H$ לכל $\sigma\in A_5$, צריך לבדוק את זה.
נשים לב כי

$$sgn(f(\sigma)) = sgn(\tau_1\cdots\tau_r\cdot(6)) = sgn(\tau_1\cdots\tau_r)\cdot sgn((6))$$
$$\underset{\text{sgn הומ'}}{=} sgn(\sigma)\cdot sgn((6)) = sgn(\sigma) \underset{\sigma\in A_5}{=} 1.$$

לכן $f(\sigma)\in A_6$. ברור כי $f(\sigma)$ מייצב את 6, כי $(f(\sigma))(n) = \begin{cases}\sigma(n), & 1\le n\le 5\\ 6, & n=6\end{cases}$

לכן $f(\sigma)\in H$. מן ההצגה המפורשת הנ"ל של $f(\sigma)$ גם ברור כי f חח"ע. אם $h\in H$, נגדיר $\sigma\in S_5$ על ידי $\sigma(n)=h(n)$ לכל $1\le n\le 5$. כיוון ש- $h(6)=6$, כל $1\le n\le 5$ אכן נשלח לאיבר של $\{1,2,3,4,5\}$. בודקים כמו קודם כי $sgn(\sigma)=sgn(h)=1$, לכן $\sigma\in A_5$. אך $h=f(\sigma)$ ולכן f על. נשאר לבדוק כי f הומומורפיזם. אבל בודקים כי

$(f(\tau)f(\sigma))(n) = f(\tau\sigma)(n)$ כלומר $(f(\tau)f(\sigma))(n) = \begin{cases}\tau\sigma(n), & 1\le n\le 5\\ 6, & n=6\end{cases}$.

לכל $n\in\{1,\dots,6\}$, וזה אומר כי $f(\tau)f(\sigma)=f(\tau\sigma)$ סיימנו את ההוכחה כי f איזומורפיזם. לכן $A_5\simeq H$.

ב) ידוע כי $H\le N_{A_6}(H)$, כי כל תת-חבורה בעולם מנרמלת את עצמה. יהי $\tau\notin H$. אזי $\tau(6)\ne 6$. יהי $1\le n\le 5$ כך ש- $\tau(n)=6$. יהי $\sigma=(1\,2\,3\,4\,5)\in A_6$, כי זה מחזור מאורך אי-זוגי. אזי $\sigma\in H$ אך $\cancel{(\tau\sigma\tau^{-1})(6) = \sigma(\tau(n)) \ne 6}$ $(\tau\sigma\tau^{-1})(6) = \tau(\sigma(n)) \ne \tau(n) = 6$, כי $\sigma(n)\ne n$. לכן $\tau\sigma\tau^{-1}\notin H$ ולכן $\tau\notin N_{A_6}(H)$.

לחילופין, אפשר לשים לב כי $(\tau\sigma\tau^{-1}) = (\tau(1)\ \tau(2)\ \tau(3)\ \tau(4)\ \tau(5))$. כיוון ש- $\tau(n)=6$ מופיע במחזור הנ"ל, $\tau\sigma\tau^{-1}$ לא מייצב את 6. בכל מקרה, $N_{A_6}(H)=\{\tau\in A_6 : \tau H\tau^{-1}=H\}=H$.

שאלה 5

א. כמה הומומורפיזמים $f:\mathbb{Z}_{12}\to S_4$ יש?

ב. מצא n הכי קטן כך שקיים הומומורפיזם חד־חד־ערכי $f:\mathbb{Z}_{12}\to S_n$.

תשובה: א) תהי G חבורה כלשהי, ויהי $g\in G$ כך ש- $o(g)|12$. אזי ההעתקה $f:\mathbb{Z}_{12}\to G$, $[n]\mapsto g^n$ מוגדרת היטב, כי $g^{12}=e_G$ ולכן $[n]=[m] \Rightarrow n\equiv m \mod 12 \Rightarrow g^n=g^m$.

ברור כי f כנ"ל הינו הומומורפיזם. מאידך גיסא, יהי $f:\mathbb{Z}_{12}\to G$ הומ' ויהי $g=f([1])$. אזי $f([n])=f([1]^n)=g^n$, וגם $g^{12}=f([12])=f(e_{\mathbb{Z}_{12}})=e_G \Leftarrow o(g)|12$. אזי בנינו התאמה חח"ע בין ההומומורפיזמים $f:\mathbb{Z}_{12}\to G$ לאיברים $g\in G$ כך ש- $o(g)|12$.

אחרי ההקדמה הזאת, נעבור למקרה הספציפי של $G=S_4$. נחשב את הסדרים של האיברים $g\in S_4$:

מבנה מחזורים של g	$o(g)$
1+1+1+1	1
2+1+1	2
2+2	$\mathrm{lcm}(2,2)=2$
3+1	3
4	4

ויוצא כי $o(g)|12$ לכל $g\in S_4$, לכן מספר ההומומורפיזמים $f:\mathbb{Z}_{12}\to S_4$ הינו $|S_4|=4!=24$.

ב) יהי $f:\mathbb{Z}_{12}\to S_n$ הומומורפיזם. אם f חח"ע, אזי $\mathrm{Im}\, f=\langle f([1])\rangle=|\mathbb{Z}_{12}|=12$ כלומר $o(f([1]))=12$. וכבר הוכחנו בסעיף הקודם שאם $o(g)=12$, עבור $g\in S_n$, אזי $f:[m]\mapsto g^m$ מגדיר הומ' לגיטימי עם $f([1])=g$. בעצם, אנחנו מחפשים n מינימלי כך ש-S_n מכיל איבר מסדר 12. בודקים מבני מחזורים, ומוצאים שהסדר המקסימלי של איבר של S_5 הינו $\mathrm{lcm}(2,3)=6$ (איברים ממבנה מחזורים 3+2). ב-S_6 הסדר המקסימלי הינו גם 6 (מבנה מחזורים 6 או 3+2+1). אבל ב-S_7 יש איברים עם מבנה מחזורים 4+3, והם מסדר $\mathrm{lcm}(4,3)=12$.

לכן ה-n המינימלי כך שקיים הומ' חח"ע $f:\mathbb{Z}_{12}\to S_7$ הינו $n=7$.

לדוגמא, ההעתקה $f:\mathbb{Z}_{12}\to S_7$, $[n]\mapsto\sigma^n$, כאשר $\sigma=(1234)(567)$, הינה הומומורפיזם חד-חד-ערכי.