בס"ד

תרגול מס' 12 בחשבון אינפי' 2

פונקציות בעלות השתנות חסומה.

הגדרה: תהא $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע $[a,b]$. נתבון בחלוקה T של הקטע:

$T: a = x_0 < x_1 ... < x_n = b$ ונגדיר את הסכום: $v(T) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$.

נסמן: $\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \sup_{T} v(T)$ ונקרא לו ***ההשתנות הכללית של*** f ***בקטע*** $[a,b]$.

אם היא מספר סופי נאמר כי f בעלת השתנות חסומה בקטע. אחרת פשוט נכתוב: $\overset{b}{\underset{a}{V}} f = \infty$.

משפט: פונקציה בעלת השתנות חסומה בקטע סגור היא חסומה בו.

הערה: המשפט ההפוך אינו נכון. למשל הפונקציה: $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & 0 < x \le 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ חסומה בקטע הסגור

$[0,1]$ אך אינה בה"ח בו שכן אינסוף פעמים הפונקציה נעה בין 1 ל -1 בסביבה ימנית של האפס.

משפט: פונקציה מונוטונית בקטע סגור היא בעלת השתנות חסומה בו, סכום והפרש של פונקציות מונוטוניות בקטע סגור הם פונקציות בעלות השתנות חסומה בו.

משפט ז'ורדן: פונקציה המוגדרת בקטע סגור היא בעלת השתנות חסומה בו אם"ם היא ניתנת להצגה כהפרש של שתי פונקציות עולות.

אבל כל פונקציה מונוטונית בקטע סגור היא אינטגרבילית וכל הפרש של אינטגרביליות הוא פונקציה אינטגרבילית ולכן נוכל להסיק גם כי:

מסקנה: פונקציה בעלת השתנות חסומה היא בהכרח אינטגרבילית.

לא להיפך: למשל הפונקציה: $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & 0 < x \le 1 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ היא אינה בעלת השתנות חסומה בקטע סגור

$[0,1]$ אך היא בכל זאת אינטגרבילית בו שכן היא חסומה ורציפה למעט בנקודה אחת (מידה אפס).

תרגיל: תהא פונקציה בעלת נגזרת חסומה בקטע $[a,b]$. אזי היא בה"ח (ולכן גם אינטגרבילית) בקטע זה.

הוכחה: באופן כללי יותר, אם $f(x)$ מקיימת בקטע $[a,b]$ את <u>תנאי ליפשיץ</u>, לאמור:

$$\exists M>0 \mid \forall x_1,x_2\in[a,b]: \left|f(x_1)-f(x_2)\right|\le M\cdot|x_1-x_2|$$

אזי היא בה"ח בקטע $[a,b]$.

<u>הוכחה</u>: לכל חלוקה שניקח נקבל: $v_f(T)=\sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|\le M\sum_{i=1}^{n}|x_i-x_{i-1}|=M(b-a)$

ולכן גם: $\overset{b}{\underset{a}{V}}\le M(b-a)<\infty$. במקרה שלנו הנגזרת של הפונקציה חסומה בקטע $[a,b]$ ולכן עפ"י משפט לגרנז' היא מקיימת את תנאי ליפשיץ: $\forall x_1,x_2\in[a,b]: \left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right|=\left|f'(c)\right|\le M$.

הערה: ההיפך שוב אינו נכון: למשל $\sqrt{x}$ בה"ח בקטע $[0,1]$ (מונוטונית שם) אך נגזרתה אינה חסומה שם.

תרגיל: תהא $f(t)$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$. הראה כי: $\int_a^x f(t)dt$ בה"ח ב-$[a,b]$.

פתרון:

נגדיר שתי פונקציות: $f^-(t)=\begin{cases}0 & f(t)\ge 0\\ -f(t) & f(t)<0\end{cases}$, $f^+(t)=\begin{cases}f(t) & f(t)\ge 0\\ 0 & f(t)<0\end{cases}$ שהפרשן הוא $f(t)$ בקטע $[a,b]$. אם תנאי דרבו לאינטגרביליות מתקיימים עבור $f(t)$ ב-$[a,b]$ (חסימות + שאיפה של סכום התנודות לאפס) אז הם מתקיימים גם עבור $f^+(t),f^-(t)$ ולכן גם אלו אינטגרביליות בקטע.

אפשר גם לראות זאת כך: שתי הפונקציות: $\begin{cases}|f(t)|=f^+(t)+f^-(t)\\ f(t)=f^+(t)-f^-(t)\end{cases}$ אינטגרביליות בקטע.

ולכן גם ההפרש והחיבור שלהן.

כמו כן שתיהן חיוביות בקטע ולכן הפונקציות הצוברות: $\int_a^x f^+(t)dt,\int_a^x f^-(t)dt$ הן מונוטוניות עולות.

מכאן עפ"י משפט ז'ורדן ההפרש שלהן: $\int_a^x f(t)dt=\int_a^x\left(f^+(t)-f^-(t)\right)dt=\int_a^x f^+(t)dt-\int_a^x f^-(t)dt$

הוא פונקציה בה"ח בקטע.

הערה: שימו לב שאינטגרביליות אינה גוררת רציפות ! אבל אם היה נתון כי $f(t)$ היא רציפה ב- $[a,b]$,

יכולנו לפתור זאת בדרך קצרה יותר: עפ"י המשפט היסודי של החדו"א: $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$. נתון כי

$f(x)$ אינטגרבילית ולכן חסומה. כלומר הנגזרת של $\int_a^x f(t)\,dt$ חסומה ב- $[a,b]$ ועפ"י התרגיל הקודם

היא גם בה"ח שם.

תרגיל: תהא הפונקציה: $f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\frac{1}{x} & 0<x\le 1 \\ 0 & x=0 \end{cases}$.

הראה כי עבור $\alpha=1$ $f(x)$ אינה בה"ח בקטע $[0,1]$ אבל עבור $\alpha=2$ היא כן.

פתרון:

עבור $\alpha=1$ נתייחס לנקודות החלוקה: $x_k=\frac{1}{\frac{\pi}{2}(2k-1)},\ k\in 2\mathbb{N}-1$ שם: $\sin(x_k)=1$,

ובנקודות: $x_k=\frac{1}{\frac{\pi}{2}(2k+1)},\ k\in 2\mathbb{N}-1$ שם: $\sin(x_k)=-1$ החל מ: $k_0=1$.

כיוון שבחלוקה יש רק מספר סופי של נקודות, נקבל סך השתנות:

$$v_f(T_n)=\sum_{k=1}^{n}\left|x_k\cdot 1-x_{k+1}\cdot(-1)\right|=\sum_{k=1}^{n}\left|x_k+x_{k+1}\right|=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2k-1}+\frac{1}{2k+1}\right)$$

לפיכך: $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)\ge \sup_T v_f(T)=\lim_{n\to\infty}v_f(T_n)=\infty$.

עבור $\alpha=2$ נשים לב שהנגזרת של $f(x)$ קיימת וחסומה בקטע $(0,1)$. יחד עם הרציפות של $f(x)$ ב- $[0,1]$ זה מספיק כדי להשתמש במשפט לגרנז' בכל תתי הקטעים של כל חלוקה ולהגיע למסקנה (ראה תרגיל קודם) כי: $\overset{b}{\underset{a}{V}}\le M(b-a)<\infty$.

משפטי דריכלה ואבל להתכנסות במ"ש של טורי פונקציות

משפט דריכלה: יהא $\sum_{k=1}^{\infty} b_k(x)$ טור פונקציות חסום במשותף בקטע I (כלומר הסס"ח שלו חסומה

במשותף שם: $\left(\exists M \mid \forall n\in\mathbb{N}, x\in I: \left|B_n(x)\right|<M\right)$ ותהא $a_k(x)$ סדרה מונוטונית המתכנסת במ"ש

לאפס ב- I. אז הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ מתכנס במ"ש ב- I.

דוגמה: הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$ מתכנס במ"ש ב- $(\varepsilon, 2\pi-\varepsilon)$ לכל $0<\varepsilon<\pi$. תחילה נראה כי הסס"ח

$\sum_{k=1}^{n}\sin kx$ חסומה שם, וכמובן שהסדרה $\frac{1}{k}$ מונוטונית ומתכנסת במ"ש לאפס בכל מקום (לא תלוי ב- x).

ניעזר בזהות: $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$ ונכתוב לכל $x\in(\varepsilon, 2\pi-\varepsilon)$:

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\sin kx=\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\sin kx\cdot\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\sum_{k=1}^{n}\left[\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x\right]$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left[\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}+\cos\frac{3x}{2}-\cos\frac{5x}{2}+.....-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)\quad\Rightarrow\quad\left|S_n(x)\right|\le\frac{1}{\sin\frac{x}{2}}<\frac{1}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}$$

כעת הודות לשני הדברים שהראינו עפ"י משפט דיריכלה הטור מתכנס במ"ש בקטע.

משפט אבל: אם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} b_k(x)$ מתכנס במ"ש בקטע I והסדרה $a_k(x)$ מונוטונית וחסומה במשותף

בו, כלומר: $\left|a_k(x)\right|<M \mid \forall x\in I, k\in\mathbb{N}: \exists M$, אז גם הטור: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ מתכנס במ"ש ב- I.

תרגיל: הראה כי הטור: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}\arctan(kx)$ מתכנס במ"ש בכל $\mathbb{R}$.

פתרון: הטור $\frac{(-1)^k}{k}$ כטור מספרים מתכנס ולכן גם במ"ש בכל $\mathbb{R}$.

כמו כן סדרת הפונקציות $\arctan(kx)$ מונוטונית עולה וחסומה במשותף ע"י $\frac{\pi}{2}$ בכל $\mathbb{R}$.

מכאן שעפ"י משפט אבל הטור שלנו מתכנס במ"ש בכל $\mathbb{R}$.

תרגיל: הראה כי הטור: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}\sin(kx)$ מתכנס במ"ש בקטע $[\varepsilon,1]$ לכל $\varepsilon>0$.

פתרון: הראינו כבר שהטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}$ מתכנס במ"ש בפרט בקטע $[\varepsilon,1]$.

הסדרה x^k מונוטונית עולה וחסומה במשותף ע"י 1 בקטע $[\varepsilon,1]$.

לכן עפ"י אבל הטור שלנו מתכנס במ"ש שם.