

88-236 חשבון אינפיניטיסימלי 4

תרגיל בית 3

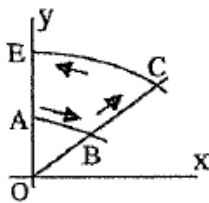
תאריך הגשה: 24.08.2001

1. נתון השדה $\vec{F}(x, y) = (xy, y)$ ויהי γ מעגל יחידה במגמה חיובית. חשבו $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot \hat{n} \, ds$, נורמל יחידה חיצוני למשטח.

2.

א. עבור איזו מסילה פשוטה סגורה בעלת אורך ובעלת כיוון חיובי ב- \mathbb{R}^2 , ערך האינטגרל הקווי $\int_C (e^{x^2} - (x+2y)^3) dx + (e^{y^2} - 12x(xy+4)) dy$ יהיה מינימאלי? מצאו את נוסחת המסילה.

ב. יהי $\int_C (-e^{y^3} - (x+2y)^3) dx + (e^{x^3} + 12x(4-xy)) dy = 0$. האם ייתכן ש- C מסילה פשוטה סגורה בעלת אורך ובעלת כיוון חיובי ב- \mathbb{R}^2 ? אם כן, מצאו דוגמא למסילה כזאת.



3. חשבו עבודת הכוח $\vec{F} = (x^2 \sin x - 2y^2)\hat{i} + \left(x^2 + \cos \frac{\pi y}{2}\right)\hat{j}$ לאורך

מסלול הבא: הקשת AB של האליפסה $x^2 + 2y^2 = 2$, קטע BC של הישר $y = x$ והקשת CE של האליפסה $x^2 + 2y^2 = 8$.

4. קבעו האם F הוא שדה משמר. אם כן, מצאו פונקציה f כך ש-
 $\nabla f = F$

א. $F(x, y) = ((6x+5y), (5x+4y))$

ב. $F(x, y) = (xe^y, ye^x)$

ג. $F(x, y) = (2x \cos y - y \cos x, (-x^2 \sin y - \sin x))$

5. חשבו

א. $\int_C \left(e^y - \tan \frac{x}{2}\right) dx + (xe^y + y \cos y^2) dy$ כאשר C הוא האיחוד של העקומים

$y = 8 - x^2$, $y = x^2$ ברביע הראשון, עם כיוון השעון.

ב. $\int_C -2e^{2x-y} \cos y dx + (e^{2x-y} (\sin y + \cos y) + 2xy) dy$ כאשר C הוא חצי האליפסה

$\left\{ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, y \geq 0 \right\}$ מהנקודה $(2, 0)$ לנקודה $(-2, 0)$.

6.

א. הוכיחו שהאינטגרל הקווי $\int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy - y^4 + 3) dx + (x^2 - 4xy^3) dy$ הוא בלתי תלוי במסלול, וחשבו אותו.

ב. מצאו את השטח שמוגבל ע"י $\{x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t\}$

7. נסמן $P = \frac{1-y}{x^2+(y-1)^2} + \frac{x}{x^2+(y+2)^2}$, $Q = \frac{x}{x^2+(y-1)^2} + \frac{y+2}{x^2+(y+2)^2}$

שדה (P, Q) הוכיחו כי $K_2 = \{(t, -2) | t > 0\}$, $K_1 = \{(t, 1) | t < 0\}$, $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 1), (0, -2)\}$ משמר באחד מבין שני התחומים $D \setminus K_1$ ו- $D \setminus K_2$ ואינו שדה משמר בתחום האחר מבין שני אלה.

8. יהי $\alpha = x dx + yz dy + xy dz$ ו- $\beta = y^2 dx + z dy - 3x dz$.

א. מצאו $\alpha \wedge \beta$.

ב. חשבו $\alpha \wedge \beta_{[1,1,1]^T}$.

ג. חשבו $\alpha \wedge \beta_{[1,1,1]^T}([1, 2, 3]^T, [2, -1, 0]^T)$.

ד. מצאו $d(\alpha \wedge \beta)$.