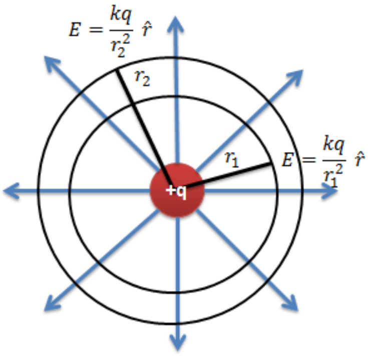
חשמל ומגנטיות – הרצאה IV



היבט כוחי וגיאומטרי:

כעת $\frac{F_e}{Q} = \left[\frac{N}{C}\right] = E = \frac{4\pi kq}{4\pi r^2} = \frac{q}{\left(\frac{1}{4\pi k}\right)4\pi r^2} \underbrace{=}_{\varepsilon_0=\frac{1}{4\pi k}=8.85\cdot10^{-12}} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \left[\frac{N}{C}\right] = \frac{\frac{q}{\varepsilon_0}}{S_{\text{קליפה}}}$.

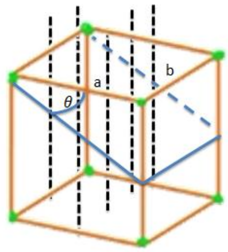
מהביטוי החדש ניתן לראות שהשדה קשור לצפיפות מטען ליחידת שטח. היחידות של הקבוע החדש הן $[\varepsilon_0] = C^2N^{-1}M^{-2}$. נגדיר $\square_c = \frac{q}{\varepsilon_0}$ ואז נקבל $\square_c = E\cdot S$.

חוק גאוס ויישומו:

מהיום נדבר על השדה כצפיפות קווי השטף. השאלה המתבקשת היא, האם המכפלה הזו חוקית בכלל?

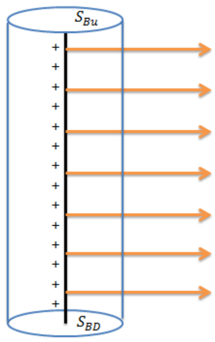
על כן, נצטרך להכליל כך $\square_c = \oint_S E\,ds = \frac{Q}{\varepsilon_0}$ על מנת שיתאים לכל מצב ולא בפרט לכדורים.

נגדיר את וקטור השטח, שגודלו כגודל השטח וכיוונו במאונך למישור המשטח. מה נעשה בקליפות? נקרב בצורה אינפיניטסמלית לגליל שניצב למשטח.



לצורך ההדגמה, ניקח תיבה כלשהי (זו שמימין). הקווים השחורים מהווים את קווי השטף, ונבנה את המישור בזווית θ שמסומן בשרטוט בכחול. השטף נתון ע״י $\square_c = ES'\cos\theta = E\cdot S$, ולכן נכתוב מחדש את האינטגרל, והוא $\square_c = \oint_S \bar{E}\cdot\overline{ds}$, וזה נקרא חוק גאוס. (בזה למדנו את החלק הראשון של החוק הראשון של מקסוול) .

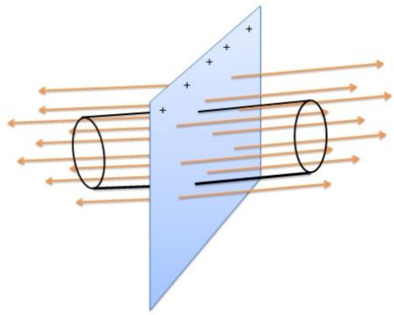
דוגמא: נביט במקרה של קליפה כדורית, ונקבל $\square_c = E\int ds = E\cdot 4\pi r^2$ וע״י העברת אגפים נקבל $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.



כעת נביט במקרה יצור שיוצר קווי שטף מאונכים לו. בשרטוט משמאל קווי השטף הם בכתום והמישור הוא בשחור, בנינו גליל (בכחול) ונחשב בעזרתו את השדה. נניח כי רדיוס הגליל הוא r. מתקיים כי השטף (ע״פ גאוס) הוא

$$\square_c = \oint_{S_{\text{גליל}}} \bar{E}\cdot\overline{ds} = \underbrace{\int_{S_{Bu}} \bar{E}\cdot\overline{ds}}_{=0\ (\cos 90=0)} + \underbrace{\int_{S_{BD}} \bar{E}\cdot\overline{ds}}_{=0\ (\cos 90=0)} + \int_{S_{rest}} \bar{E}\cdot\overline{ds} = E\int_{S_{rest}}\overline{ds} = E\cdot\overbrace{2\pi rh}^{S_{rest}}$$

ואז קיבלנו $\frac{Q}{\varepsilon_0} = 2\pi rhE$ ולכן $E = \frac{\frac{Q}{\varepsilon_0}}{2\pi rh}$.



וכעת נביט במקרה של מישור ״אינסופי״ *so called*. נעביר במרכזו גליל, כמו שמצוייר מימין. נשתמש בחוק גאוס.

השטף: $\square_c = \oint_S \bar{E}\cdot\overline{ds} = 2\int_{S_{\text{בסיסים}}} \bar{E}\cdot\overline{ds} + \underbrace{\int_{S_{rest}} \bar{E}\cdot\overline{ds}}_{=0} = 2E\int ds = 2ES = \frac{S\sigma}{\varepsilon_0}$ כאשר σ היא צפיפות המטען ליחידת שטח. נעביר אגפים ונקבל כי השדה שווה $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

כעת נכליל לכל מישור, ונבחר שם גם כן גליל המאונך, וכך בעצם אפשר לחשב את השטף, וכך את השדה עבור כל מישור שהוא. כלי פיסיקאלי חזק מאוד.