פתרון לתרגיל ארבע

1. נשים לב ש- $a^{20}=1$ ולכן החבורה היא סופית מסדר 20.

2. **א.** ידוע שבחבורה ציקלית מסדר n קיימת רק ת"ח אחת מסדר k כך ש- n | k (שהיא גם ציקלית). בפרט, הת"ח של Z_n הן מהצורה kZ_n כש- n | k. לכן הת"ח של Z_{20} הן:

$$\{0,10\}$$
$$\{0,5,10,15\}$$
$$\{0,4,8,12,16\}$$
$$\{0,2,4,6,8,10,12,14,16,18\}$$

ב. הסדר של 40-הוא $\frac{lcm(40,100)}{40}=\frac{lcm(2^3 5,2^2 5^2)}{40}=\frac{2^3 5^2}{40}=5$

הסדר של 7- הוא 100 כיוון ש-7 ו-100 זרים.

הסדר של 16-הוא $\frac{lcm(16,100)}{16}=\frac{lcm(2^4,2^2 5^2)}{16}=\frac{2^4 5^2}{2^4}=5^2=25$

הסדר של 29-הוא 100 כיוון ש-29 זר ל-100.

3.

1. סגירות מתקיימת מכיוון שפעולת החיבור סגורה ב-N ולכן $(f+g)(n)=f(n)+g(n)\in N$

אסוציאיטיביות גם כן מתקיימת בגלל האסוציאטיביות של פעולת החיבור ב-N

$$(f+(g+h))(n)=f(n)+(g+h)(n)=f(n)+(g(n)+h(n))$$

ובגלל האסוציטיביות ב- N נקבל:

$$f(n)+(g(n)+h(n))=(f(n)+g(n))+h(n)=(f+g)n+h(n)=((f+g)+h)(n)$$

ומכאן אסוציאטיביות עבור פעולת החיבור מתקיימת ב-A.

נבדוק אם קיים איבר היחידה :

אנחנו מחפשים איבר $e\in A$ כך ש-

$$e+f=f+e=f$$

$$f+e=f \Leftrightarrow (f+e)(n)=f(n)+e(n)\ \forall n\in N$$
$$f(n)+e(n)=f(n)\Leftrightarrow e(n)=0$$

(באופן מדויק יותר $f(n)+e(n)=f(n)\Leftrightarrow e(n)=e_N$ - e_N איבר היחידה של N)

וקיבלנו סתירה לכך ש- $e\in A$ מכיוון שאין יחידה חיבורית ב- N.

לכן $(A,+)$ היא **חבורה למחצה.**

ב)

סגירות מתקיימת מכיוון שפעולת החיבור סגורה ב- Z. (הסבר דומה לסעיף א')

אסוציאטיביות מתקיימת בכלל האסוציאטיביות של פעולת החיבור ב- Z. (הסבר דומה לסעיף א')

איבר היחידה: התנאי שקיבלנו לקיום איבר יחידה עבור פעולת החיבור הוא שאיבר היחידה יהיה קיים בקבוצה אליה אנחנו מעתיקים.

מכיוון שכך קיום איבר יחידה ב- Z , $0 \in Z$ (0 הוא איבר יחידה ב-Z) אומר שקיים איבר יחידה ב-B
והוא פונקציית ה"אפס" $e(z) = 0\,\forall z \in Z$ ואכן:

$$(f+e)(z) = f(z)+e(z) = f(z)+0 = f(z)\ \forall z \in Z$$

(התכונה ש- e היא יחידה משמאל נובעת מהקומוטטיביות של Z)

<u>איבר הופכי:</u>

לכל $f \in B$ נגדיר את הפונקציה $(-f): Z \to Z$ ע"י $(-f)(z) = -f(z)\ \forall z \in Z$

לפי הגדרת הפונק: $(-f) \in B$

ומתקיים:

$$(f+(-f))(z) = f(z)+((-f)(z)) = f(z)+(-f(z)) = f(z)-f(z) = 0$$

ומצאנו איבר הופכי לכל $f \in B$

לכן $(B,+)$ היא **חבורה**.

4. ההוכחה קלה – צ"ל רק סגירות לכפל ולהופכי – לפי חוקי מטריצות, מטריצת הכפל של שתי מטריצות שיש להן דטרמיננטה=1 – גם לה יש דטרמיננטה = 1; כנ"ל להופכי