<u>פיתרון תרגיל מספר 6:</u>

<u>תשובה 1:</u>

עפ"י הנתון $\lambda = 30$ בשעה

א. $X \sim P(\lambda = 2.5)$ ב-5 דקות

$$P(X \ge 4) = 1 - \left(P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)\right) =$$
$$= 1 - \left(\frac{e^{-2.5}2.5^0}{0!} + \frac{e^{-2.5}2.5^1}{1!} + \frac{e^{-2.5}2.5^2}{2!} + \frac{e^{-2.5}2.5^3}{3!}\right) = 0.2433$$

ההסתברות שבמשך 5 דקות ייכנסו לפחות 4 אנשים היא: 0.2433

ב. $X \sim P(\lambda = 5)$ ב- 10 דקות

$$P(X \ge 4) = 1 - \left(P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3)\right) =$$
$$= 1 - \left(\frac{e^{-5}5^0}{0!} + \frac{e^{-5}5^1}{1!} + \frac{e^{-5}5^2}{2!} + \frac{e^{-5}5^3}{3!}\right) = 0.735$$

ההסתברות שבמשך 10 דקות ייכנסו לפחות 4 אנשים היא: 0.735

ג. $X \sim P(\lambda = 30)$ בשעה לכן $X \sim P(\lambda = \frac{1}{2})$ בדקה ומכאן ש $X \sim P(\lambda = \frac{N}{2})$ ב- N דקות

לפי נוסחה לתוחלת של התפלגות פואסון: $E(X) = \lambda = \frac{N}{2}$

<u>תשובה 2:</u>

לפי מה שלמדנו $Z \sim P(\lambda + \mu)$.

עבור כל $0 \le k \le n$:

$$P(X = k \mid Z = n) = \frac{P(X = k, Y = n-k)}{P(Z = n)} = \frac{P(X = k)P(Y = n-k)}{P(Z = n)} =$$
$$= \frac{e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\mu}\dfrac{\mu^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-(\lambda+\mu)}\dfrac{(\lambda+\mu)^n}{n!}} = \binom{n}{k}\frac{\lambda^k\mu^{n-k}}{(\lambda+\mu)^n} = \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-k}$$

לכן ההתפלגות המותנה של X היא $B\left(n, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$. בשיוויון השני השתמשנו באי תלות בין X ל Y

תשובה 3:

בסיס האידוקציה $r=1$ טריוויאלי. נניח נכונות עבור $X_1,\cdots,X_{r-1}$ ונוכיח עבור $X_1,\cdots,X_r$.

$$P(X_1,\cdots,X_r=n)=\sum_{m=0}^{n}P(X_1,\cdots,X_{r-1}=m,X_r=n-m)=$$

$$\sum_{m=0}^{n}\frac{e^{-(r-1)\lambda}((r-1)\lambda)^m}{m!}\cdot\frac{e^{-\lambda}\lambda^{n-m}}{(n-m)!})=\frac{e^{-r\lambda}}{n!}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}\ ((r-1)\lambda)^m\lambda^{n-m}=$$

$$=\frac{e^{-r\lambda}}{n!}\left((r-1)\lambda+\lambda\right)^n=\frac{e^{-r\lambda}}{n!}\ (r\lambda)^n$$

תשובה 4:

מספר הסטודנטים X_k שמאחרים ב – k דקות לשיעור $k=1,\ldots,10$, מתפלג פואסוני עם פרמטר $\lambda=2$. המשתנים בלתי תלויים. בתום 10 דקות לא מכניסים סטודנטים לשיעור.

א.

סכום מספר המאחרים ב – n הדקות הראשונות מתפלג פואסונית עם פרמטר λn עבור n קטן או שווה לעשר. עבור n גדול מעשר נספרים רק המאחרים של עשר הדקות הראשונות ואלו מתפלגים פואסונית עם 10λ.

ב.

נזכר שבתהליך פואסוני אין תלות בין מספר המופעים במרקי זמן זרים. נסמן – S'_7 מספר המאחרים בין סיום דקה 2 לסיום דקה 9. יש שבע דקות בפרק זמן זה ולכן מספר המאחרים מתפלג פואסונית עם $7\lambda=14$. עבור כל $k>2$, ההסתברות היא:

$$P(S_9=k\mid S_2=2)=\frac{P(S_9=k,S_2=2)}{P(S_2=2)}=$$

$$=\frac{P(S_2=2)P(S'_7=k-2)}{P(S_2=2)}=P(S'_7=k-2)=\frac{e^{-14}(14)^{k-2}}{(k-2)!}$$

תשובה 5:

א.

$$.E[X!]=\sum_x x!\,P_X(x)=\sum_{k=0}^{\infty}k!\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k=\frac{e^{-\lambda}}{1-\lambda}$$

ב.

$$E[(X+1)!]=\sum_x(x+1)!\,P_X(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)!\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\lambda^k$$

$$=e^{-\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k+1}=e^{-\lambda}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)=\frac{e^{-\lambda}}{(1-\lambda)^2}.$$

בשני המקרים התשובה קיימת עבור $0\le\lambda<1$ בלבד.

למי שלא יודע: ∂ הוא סימון של נגזרת.

<u>תשובה 6:</u>

א. נגדיר מ״מ X – מספר התקלות במשך יום אחד :

$$X \sim Pois(\mu = 5) \Rightarrow$$

$$P(X \geq 1) = 1 = P(X = 0) = 1 - e^{-5} * \frac{(5)^0}{0!} = 0.9932$$

ב. נגדיר מ״מ X_2 – מספר התקלות במשך יומיים :

$$X_2 \sim Pois(\mu = 5 * 2) \Rightarrow$$

$$P(X_2 = 0) = e^{-10} * \frac{(10)^0}{0!}$$

ג.נגדיר מ״מ Y– מספר ימי עבודה ״מוצלחים״ במשך חודש עבודה :

$$Y \sim Bin(n = 25, p)$$

$$p = P(X \leq 1) = e^{-5} * \frac{(5)^0}{0!} + e^{-5} * \frac{(5)^1}{1!} = 0.125$$

$$P(Y \geq 10) = \sum_{i=10}^{25} \binom{25}{i} 0.125^i * 0.875^{25-i}$$

<u>תשובה 7:</u>

נסמן X – מספר הכדורים שנפלטו בשנייה הראשונה

נסמן Y – מספר הכדורים שנפלטו בארבע השניות הנותרות מבין החמש

נסמן Z – מספר הכדורים שנפלטו סך הכול בחמש השניות

$$P(X = k \mid z = 3) = \frac{P(X = k \bigcap Z = 3)}{p(Z = 3)} = \frac{P(X = k \bigcap Y = 3 - k)}{p(Z = 3)} = \ldots$$

$$\ldots = \frac{P(X = k)P(Y = 3 - k)}{p(Z = 3)} = \frac{e^{-0.5} \frac{0.5^k}{k!} e^{-2} \frac{2^{3-k}}{(3-k)!}}{e^{-2.5} \frac{2.5^3}{3!}} = \binom{3}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{3-k}$$

שימו לב – זוהי התפלגות בינומית. לא במקרה.

בהינתן שנפלטו 3 כדורים בחמש שניות. כל כדור נפלט בשנייה הראשונה בסיכוי חמישית באופן בלתי תלוי באחרים. לכן ההסתברות שנפלטו k כדורים בשנייה הראשונה היא בינומית עם n=3.

<u>תשובה 8:</u>

א. $P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$. עמ"נ למצא מקסימום נגזור לפי λ ונמצא את k שיקיים את המשוואה

$\frac{\partial P(X=k)}{\partial\lambda}=\frac{1}{k!}\left(e^{-\lambda}\cdot k\lambda^{k-1}-e^{-\lambda}\cdot\lambda^k\right)=0$ מכאן $e^{-\lambda}\cdot\lambda^{k-1}(k-\lambda)=0$ לכן $\lambda=k$.

ב. $P(X=even)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X=2k)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{2k}}{(2k)!}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}=$

נשים לב : האיבר ה- $2k$ בפיתוח לטור חזקות של $e^{-\lambda}$ הוא זהה לזה של e^{λ} והאיבר ה- $2k+1$ בפיתוח לטור חזקות של $e^{-\lambda}$ הוא הנגדי לזה של e^{λ} (שכן $(-1)^{2k+1}=-1$) לכן אם נסכום אותם כל האיברים האיזוגיים יתאפסו ואילו את האיברים הזוגיים נקבל פעמיים. כדי לפצות על כך נחלק ב- 2.

<u>שאלה 9: נפתרה בכיתה.</u>