פתרון לתרגיל 5 באינפי 3

.1

(א) $f(x,y)=x^3+3y^2-\frac{x}{y}$

i. נגזרת לפי x:

$$f_x'(x,y)=3x^2-\frac{1}{y}$$

מוגדרת בכל נקודה שבה f מוגדרת כלומר כל נקודה שבה $y\neq 0$.

ii. נגזרת לפי y:

$$f_y'(x,y)=6y+\frac{x}{y^2}$$

גם כן מוגדרת בכל נקודה שבה $y\neq 0$.

(ב) $f(x,y)=e^{\cos(xy)}$

i. נגזרת לפי x:

$$f_x'(x,y)=e^{\cos(xy)}\sin(xy)y$$

ii. ובאופן סימטרי נגזרת לפי y היא

$$f_y'(x,y)=e^{\cos(xy)}\sin(xy)x$$

שתיהן מוגדרות בכל $\mathbb{R}^2$.

(ג) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

i. נגזרת לפי x:

$$f_x'(x,y,z)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

ii. באופן סימטרי הנגזרות לפי y,z הן:

$$f_y'(x,y,z)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad f_z'(x,y,z)=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

כל הנגזרות מוגדרות ב $\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$.

(ד) $f(x,y,z)=ln(x^3+y^3-z^3)$

i. נגזרת לפי x:

$$f_x'(x,y,z)=\frac{1}{x^3+y^3-z^3}\cdot 3x^2=\frac{3x^2}{x^3+y^3-z^3}$$

ii. בדומה

$$f_y^{'}(x,y,z) = \frac{3y^2}{x^3+y^3-z^3}, \quad f_z^{'}(x,y,z) = \frac{-3z^2}{x^3+y^3-z^3}$$

כל הנגזרות מוגדרות בנקודות שבהן $x^3+y^3-z^3 > 0$.

.2

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

יש להפריד בין הנגזרת ב $(0,0)$ לנגזרת במקומות אחרים. בכל נקודה שהיא לא $(0,0)$:

$$f_x^{'}(x,y) = \frac{4xy(x^2+y^2) - 2x(2x^2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4x^3y + 4xy^3 - 4x^3y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y^{'}(x,y) = \frac{2x^2(x^2+y^2) - 2y(2x^2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^4 + 2x^2y^2 - 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^4 - 2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

בנקודה $(0,0)$ נקבל:

$$f_x^{'}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$f_y^{'}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

לכן הנגזרות החלקיות הן:

$$f_x^{'}(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_y^{'}(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^4-2x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

כעת נותר לבדוק את רציפותן ב $(0,0)$. עבור $f_x^{'}$ נוכל להתקדם על ישר $x=y$.
ולקבל

$$\lim_{x\to 0} f_x^{'}(x,x) = \frac{4x^4}{(2x^2)^2} = 1 \neq 0$$

ולכן $f_x^{'}$ לא רציפה ב $(0,0)$. עבור $f_y^{'}$ נתקדם על הישר $y=0$ ונקבל:

$$\lim_{x\to 0} f_y^{'}(x,0) = \frac{2x^4}{(x^2)^2} = 2 \neq 0$$

ולכן גם $f_y^{'}$ לא רציפה ב $(0,0)$.

.3

(א)

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

נתחיל בכך שנוכיח כי f דיפרנציאבילית בכל נקודה שבה $(x,y)\neq 0$. קל לראות ש f רציפה בנקודות אלה כי היא מכפלה/חיבור/חילוק של פונקציות רציפות. נחשב את הנגזרות החלקיות ונראה שהן רציפות

$$f_x'(x,y)=\frac{3x^2(x^2+y^2)-2x(x^3+y^4)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{3x^4+3x^2y^2-2x^4-2xy^4}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^4+3x^2y^2-2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y'(x,y)=\frac{4y^3(x^2+y^2)-2y(x^3+y^4)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{4x^2y^3+4y^5-2x^3y-2y^5}{(x^2+y^2)^2}=\frac{4x^2y^3+2y^5-2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

ברור ששתי הנגזרות החלקיות רציפות בכל נקודה $(x,y)\neq(0,0)$ ולכן f דיפרנציאבילית בנקודות אלה. כעת נבדוק דיפרנציאביליות של f ב $(0,0)$. קל לראות ש f רציפה ב $(0,0)$ כי

$$\left|\frac{x^3+y^4}{x^2+y^2}\right|\leq\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right|+\left|\frac{y^4}{x^2+y^2}\right|\leq\left|\frac{x^3}{x^2}\right|+\left|\frac{y^4}{y^2}\right|=|x|+|y^2|\overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow}0$$

נחשב נגזרות חלקיות

$$f_x'(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^3}{h^2}}{h}=1$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^4}{h^2}}{h}=\lim_{h\to0}h=0$$

כעת נבדוק דיפרנציאביליות לפי הגדרה

$$f(h_1,h_2)=f(0,0)+h_1+\epsilon(h)\sqrt{h_1^2+h_2^2}$$

$$\frac{h_1^3+h_2^4}{h_1^2+h_2^2}=h_1+\epsilon(h)\sqrt{h_1^2+h_2^2}$$

$$\frac{h_2^4-h_1h_2^2}{h_1^2+h_2^2}=\epsilon(h)\sqrt{h_1^2+h_2^2}$$

$$\frac{h_2^4-h_1h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{\frac{3}{2}}}=\epsilon(h)$$

נבדוק אם ביטוי זה מתכנס ל 0 כאשר $(h_1,h_2)\to(0,0)$. נתקדם לאורך הישר $h_1=h_2$ ונקבל

$$\frac{h_1^4-h_1^3}{(2h_1^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{8}}\frac{h_1^4-h_1^3}{|h_1^3|}=\frac{1}{\sqrt{8}}\frac{h_1^4}{|h_1^3|}-\frac{1}{\sqrt{8}}\frac{h_1^3}{|h_1^3|}$$

אמנם $\frac{1}{\sqrt{8}}\frac{h_1^4}{|h_1^3|}$ מתכנס ל 0 כאשר $h_1 \to 0$ אבל ל $\frac{1}{\sqrt{8}}\frac{h_1^3}{|h_1^3|}$ אין גבול כאשר $h_1 \to 0$ ולכן הביטוי בכלל לא מתכנס ולכן f לא דיפרנציאבילית ב $(0,0)$.
לסיכום: f דיפרנציאבילית בנקודות $(x,y) \neq (0,0)$.

(ב)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

שוב, נתחיל בנקודות $(x,y) \neq (0,0)$. נמצא נגזרות חלקיות

$$f_x'(x,y) = \frac{3x^2(\sqrt{x^2+y^2}) - \frac{(x^3-y^2)(2x)}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{3x^4+3x^2y^2-x^4-xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2x^4+3x^2y^2-xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f_y'(x,y) = \frac{-2y\sqrt{x^2+y^2} - \frac{(x^3-y^2)(2y)}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{-2x^2y-2y^3-x^3y+y^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{-2x^2y-y^3-x^3y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

שתי הנגזרות רציפות כאשר $(x,y) \neq (0,0)$ ולכן f דיפרנציאבילית בנקודות אלה. נעבור לנקודה $(0,0)$. קל לראות ש f רציפה מפני ש

$$|\frac{x^3-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}| \leq |\frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}|+|\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}| \leq |\frac{x^3}{x}|+|\frac{y^2}{y}| = |x^2|+|y| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

נחשב נגזרות חלקיות ב $(0,0)$:

$$f_x'(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{|h|}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2}{|h|} = 0$$

$$f_y'(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h^2}{|h|}}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{h}{|h|}$$

הגבול הזה לא קיים. לכן $f_y'(0,0)$ לא קיימת ולכן f לא דיפרנציאבילית ב $(0,0)$. לסיכום f דיפרנציאבילית בכל נקודה $(x,y) \neq (0,0)$.

(ג)

$$f(x,y) = \ln(x^4+y^6+1)$$

נחשב נגזרות חלקיות

$$f_x'(x,y) = \frac{4x^3}{x^4+y^6+1}$$

$$f_y'(x,y) = \frac{6y^5}{x^4+y^6+1}$$

שתי הנגזרות קיימות ורציפות בכל $\mathbb{R}^2$ ולכן f דיפרנציאבילית בכל $\mathbb{R}^2$.

(ד)

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{y^2}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

נתחיל בבדיקת הנקודות שבהן $x\neq 0$, נמצא את הנגזרות החלקיות

$$f_x'(x,y)=\sin\frac{y^2}{x}+x\cos\frac{y^2}{x}\cdot(-\frac{y^2}{x^2})=\sin\frac{y^2}{x}-\frac{y^2}{x}\cos\frac{y^2}{x}$$

$$f_y'(x,y)=x\cos\frac{y^2}{x}\cdot(\frac{2y}{x})=2y\cos\frac{y^2}{x}$$

שתיהן קיימות ורציפות כאשר $x\neq 0$ ולכן f דיפרנציאבילית בנקודות אלה.
כעת נבדוק את הנקודות שבהן $x=0$. קל לראות ש f רציפה מפני ש

$$|x\sin\frac{y^2}{x}|\leq|x|\overset{(x,y)\to(0,y_0)}{\longrightarrow}0$$

נמצא נגזרות חלקיות בנקדות שבהן $x=0$ כלומר בנקודה $(0,y_0)$

$$f_y'(0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h+y_0)-f(0,y_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

$$f_x'(0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,y_0)-f(0,y_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h\sin\frac{y_0^2}{h}}{h}=\lim_{h\to 0}\sin\frac{y_0^2}{h}$$

כאן צריך להפריד למקרים. אם $y_0\neq 0$ אז אין גבול. אם $y_0=0$ אז מתקבל גבול 0. לכן אם $y_0\neq 0$, f לא דיפרנציאבילית כי אין נגזרת חלקית. בנקודה $(0,0)$ שתי הנגזרות קיימות ויש לבדוק דיפרנציאביליות לפי הגדרה

$$f(h_1,h_2)=f(0,0)+\epsilon(h)\sqrt{h_1^2+h_2^2}$$

$$h_1\sin\frac{h_2^2}{h_1}=\epsilon(h)\sqrt{h_1^2+h_2^2}$$

$$\epsilon(h)=\frac{h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\sin\frac{h_2^2}{h_1}$$

כאן בעיקרון צריך לחלק למקרים. מקרה א': אם $\frac{h_2^2}{h_1}\to 0$ אז נזכור כי

$$\frac{h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\sin\frac{h_2^2}{h_1}=\frac{h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\frac{h_2^2}{h_1}\frac{\sin\frac{h_2^2}{h_1}}{\frac{h_2^2}{h_1}}$$

החלק $\frac{\sin\frac{h_2^2}{h_1}}{\frac{h_2^2}{h_1}}$ מתכנס ל 1 כאשר $(h_1,h_2)\to(0,0)$ ולכן נותר לבדוק לאן מתכנס החלק השני

$$\frac{h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\frac{h_2^2}{h_1}=\frac{h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\leq\frac{h_2^2}{|h_2|}\overset{(h_1,h_2)\to(0,0)}{\longrightarrow}0$$

השיקול הזה מראה שאם מתקדמים ל 0 כאשר $h_2^2 > |h_1|$ אז יש התכנסות ל 0. מקרה ב': אם $h_2^2 = |h_1|$ אז מתקבל

$$\left|\frac{h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\sin\frac{h_2^2}{h_1}\right| \le \frac{h_2^2}{\sqrt{h_2^4+h_2^2}} \le \frac{h_2^2}{|h_2|} \to 0$$

מקרה ג': בצורת התקדמות שבה $h_2^2 < |h_1|$ יתקיים שקיים $m > 0$ כך ש

$$\frac{h_2^2}{h_1} > m$$

ולכן

$$\frac{h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\sin\frac{h_2^2}{h_1} \le \frac{h_1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{h_2^2}{h_1^2}}} \le \frac{1}{\sqrt{1+\frac{m}{|h_1|}}} \to 0$$

לכן בכל צורת התקדמות נקבל שהגבול הוא 0 ולכן f דיפרנציאבילית ב $(0,0)$. לסיכום f דיפרנציאבילית בנקודות שבהן $x \neq 0$ ובנוסף בנקודה $(0,0)$. בנקודות $(0,y)$ כאשר $y \neq 0$, f לא דיפרנציאבילית.

.4

$$f(x,y) = (xy)^{\frac{2}{3}}$$

(א)

$$f_x'(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}-(xy)^{\frac{2}{3}}}{h} =$$
$$= y^{\frac{2}{3}}\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}{h} = y^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}})'$$

נשים לב שבנקודות בהן $y=0$ מתקיים כי $f_x'(x,y)=0$ ובנקודות בהן $y \neq 0$, מתקיים כי $f_x'(x,y) = y^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}})' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$. לכן לסיכום:

$$f_x'(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} & x \neq 0 \\ 0 & (x,y)=(0,0) \\ undefined & x=0 \quad y\neq 0 \end{cases}$$

(ב) אם $x \neq 0$ מתקיים כי $f_x'(x,y) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}$ שהיא כמובן לא חסומה בסביבת $(0,0)$.

(ג) ברור כי f רציפה בסביבת $(0,0)$, וחישבנו כבר $f_x'(0,0)$, נחשב את $f_y'(0,0)$:

$$f_y'(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

כעת נבדוק דיפרנציאביליות לפי הגדרה

$$f(h_1,h_2)=f(0,0)+\epsilon(h)\sqrt{h_1^2+h_2^2}$$

$$(h_1h_2)^{\frac{2}{3}}=\epsilon(h)\sqrt{h_1^2+h_2^2}$$

$$\epsilon(h)=\frac{(h_1h_2)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}$$

נשתמש באי השוויון $2|x||y|\leq x^2+y^2$ ונקבל:

$$|\frac{(h_1h_2)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}|\leq|\frac{(h_1h_2)^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{2h_1h_2}}|=\frac{1}{\sqrt{2}}(|h_1||h_2|)^{\frac{1}{6}}\overset{(h_1,h_2)\to(0,0)}{\longrightarrow}0$$

לכן f דיפרנציאבילית ב $(0,0)$.

.5

(א) f דיפרנציאבילית ב $(0,0)$ ולכן לפי הגדרה

$$f(t_1,t_2)=f(0,0)+f_x^{'}(0,0)t_1+f_y^{'}(0,0)t_2+\epsilon(t)||t||$$

ומתקיים $\epsilon(t)\overset{t\to 0}{\longrightarrow}0$ (אני משתמש ב t כי הסימון h תפוס כבר). לפי הנתונים זה בעצם אומר ש

$$f(t_1,t_2)=\epsilon(t)||t||$$

כלומר

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(t_1,t_2)}{||h||}=0$$

נשים לב שלפי הגדרת $h(x,y)$

$$h(0,0)=0$$

$$h_x^{'}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{h(t,0)-h(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}=0$$

$$h_y^{'}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{h(0,t)-h(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}=0$$

נבדוק אם $h(x,y)$ דיפרנציאבילית ב $(0,0)$ לפי הגדרה

$$h(t_1,t_2)=h(0,0)+h_x^{'}(0,0)t_1+h_y^{'}(0,0)t_2+\epsilon(t)||t||$$

$$h(t_1,t_2)=\epsilon(t)||t||$$

$$\varepsilon(t)=\frac{h(t_1,t_2)}{\|t\|}$$

נשים לב שלפי הגדרת h מתקיים כי $h(t_1,t_2)=f(t_1,t_2)$ או $h(t_1,t_2)=0$ לכן בכל מקרה $|h(t_1,t_2)|\le|f(t_1,t_2)|$ ולכן:

$$\left|\frac{h(t_1,t_2)}{\|t\|}\right|\le\left|\frac{f(t_1,t_2)}{\|t\|}\right|\to 0$$

כאשר $(t_1,t_2)\to(0,0)$ לכן h דיפרנציאבילית ב־$(0,0)$.

ב) נגדיר $S(x,y)=f(x,y)-g(x,y)$ ו $T(x,y)=h(x,y)-g(x,y)$ נשים לב ש־S דיפרנציאבילית ב־$(0,0)$ כי היא הפרש של שתי פונקציות שדיפרנציאביליות ב־$(0,0)$ ובנוסף:

$S(0,0)=0$ $S'_x(0,0)=0$ $S'_y(0,0)=0$, כמו כן ,

$$T(x,y)=\begin{cases}S(x,y) & xy>0\\ 0 & xy\le 0\end{cases}$$

לפי סעיף א' , T דיפרנציאבילית ב־$(0,0)$ ולכן $h(x,y)$ דיפרנציאבילית ב־$(0,0)$ $(h(x,y)=T(x,y)+g(x,y))$

פתרון לשאלה 6

א) נמצא קודם את הגבולות החוזרים:

$$lim_{x\to0}lim_{y\to0}\frac{y^2}{x^4+y^2}=lim_{x\to0}0=0$$

$$lim_{y\to0}lim_{x\to0}\frac{y^2}{x^4+y^2}=lim_{y\to0}\frac{y^2}{y^2}=1$$

כאן אפשר כבר לעצור כי משום שגבולות החד צדדים קיימים ולא שווים ולכן הגבול הכפול לא קיים אבל נבדוק בכל זאת:

נבחר הצבה: $y=kx^2$ ו $x\to0$ כלומר נשאף לראשית הצירים על הפרבולה $y=kx^2$ ונקבל:

$$lim_{y=kx^2,x\to0}\frac{k^2x^4}{x^4+k^2x^4}=\frac{k^2}{1+k^2}$$

קיבלנו שהגבול תלוי ב־k ולכן לא קיים.

ב) נחשב קודם את הגבולות החוזרים:

$$lim_{x\to0}lim_{y\to0}\frac{xsin\left(\frac{1}{x}\right)+y}{x+y}=lim_{x\to0}sin\left(\frac{1}{x}\right)=notexist$$

$$lim_{y\to 0}lim_{x\to 0}\frac{xsin\left(\frac{1}{x}\right)+y}{x+y}=lim_{y\to 0}1=1$$

גם כאן אפשר לעצור משום שברור שהגבול הכפול אינו קיים, אבל נצדיק אז זה על ידי כך שנבחר הצבה $y=0$ $x\to 0$ ולכן נקבל:

$$lim_{y=0,x\to 0}sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

והגבול הזה אינו קיים.