תרגיל 6

1. איזה תכונות הפרדה מקיים המרחב הבא?
$(\mathbb{N},\tau)$ כאשר $\tau=\{O_n\}_{n\in\mathbb{N}}\cup\{\mathbb{N},\emptyset\}$ ו $O_n=\{1,...,n\}$.

2. הוכיחו כי T_2 הוא תורשתי. כלומר, יהא (X,τ) מ״ט T_2 הוכיחו כי כל תת מרחב $Y\subseteq X$ הוא גם T_2.

3. יהא (X,τ) מ״ט בעל תכונה T_2. תהא $\tau'\supseteq\tau$ טופולוגיה נוספת על X. הוכיחו כי (X,τ') גם כן T_2.

4. בתרגיל זה נוכיח כי כל מ״מ (X,d) הוא T_4. יהא (X,d) מ״מ ויהיו S_1,S_2 קבוצות סגורות זרות.
   (א) לכל $x\in S_1$ הוכיחו כי $d(x,S_2)>0$
   (ב) לכל $x\in S_1$ נגדיר $r_x=\frac{d(x,S_2)}{2}$ ונגדיר $V_1=\cup_{x\in S_1}B(x,r_x)$. באופן דומה, לכל $y\in S_2$ נגדיר $r_y=\frac{d(y,S_1)}{2}$ ונגדיר $V_2=\cup_{y\in S_2}B(y,r_y)$. ברור כי V_1,V_2 פתוחות וזרות ו $S_i\subseteq V_i$. הוכיחו כי V_1,V_2 זרות וזה יסיים את ההוכחה כי (X,d) הוא T_4.

5. נראה מרחב שהוא T_2 שאינו T_3. נתבונן ב$\mathbb{R}$ ובתת קבוצה שלו $S=\{\frac{1}{n}\,:\,n\in\mathbb{N}\}$. נגדיר $\mathbb{CL}$ את קבוצת הקבוצות הסגורות ב $\mathbb{R}$ לפי המטריקה האוקלידית. ונגדיר $C=\{A\cup T|\,A\in\mathbb{CL},\,T\subseteq S\}$ להיות הקבוצות הסגורות בטופלוגיה τ (כלומר τ מוגדרת להיות כל קבוצת כל המשלימים של קבוצות אלו). תאמינו לנו, τ יוצאת טופולוגיה.
   (א) נאפיין את הקבוצות הפתוחות: הוכיחו כי $O\in\tau\iff O=B\cap R$ כאשר B פתוחה בטופולוגיה האוקלידית ו$R\subseteq S^c$.
   (ב) הוכיחו שτ מכילה את הטופולוגיה האוקלידית, והסיקו ש $(\mathbb{R},\tau)$ הוא האוסדורף.
   (ג) הראו שאם $O\in\tau$ כך ש $S\subseteq O$, אז O פתוחה בטופולוגיה האוקלידית.
   (ד) הוכיחו שלא קיימות U,V פתוחות בτ וזרות כך ש $S\subseteq V$, $0\in U$. הסיקו ש $(\mathbb{R},\tau)$ אינו T_3.

6. תהא $A \subsetneq \mathbb{R}$ קבוצה צפופה ב $\mathbb{R}$. הוכיחו כי A לא קשירה.

7. יהי (X, τ) מרחב טופולוגי. עבור קבוצה $A \subseteq X$ נגדיר את הפונקציה $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ שנקראת הפונקציה האופיינית של A לפי

$$\chi_A = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

הוכיחו כי X קשירה אם ורק אם לכל $A \subseteq X$ (למעט $\emptyset, X$) הפונקציה χ_A אינה רציפה.

8. האם המרחבים הבאים קשירים?

(א) $(\mathbb{R} \cup \{p\}, \tau)$ כאשר $\tau = P(\mathbb{R}) \cup \{O \subseteq \mathbb{R} \cup \{p\} : |O^c| < \aleph_0\}$.

(ב) $(\mathbb{N}, \tau)$ כאשר $\tau = \{\emptyset, \mathbb{N}, O_n\}\forall n$, $O_n = \{0, ..., n\}$.

(ג) $\mathbb{Z}$ עם הטופולוגיה המושרית מהמטריקה הp- אדית.

9. יהו $A, B \subseteq X$ קבוצות פתוחות כך ש $A \cap B$ ו $A \cup B$ קשירים. הוכיחו שA, B קשירות.

10. מהם רכיבי הקשירות ב$\mathbb{Q}$ עם הטופולוגיה האוקלידית?

11. הוכיחו שבלתי קשירות לחלוטין היא תכונה תורשתית.