אינפי 1 – תרגיל 9

1. תהי פונקציה ממשית $f(x)$ ויהי $-\infty \le L \le \infty$ (כלומר L מספר ממשי כלשהו, או אינסוף או מינוס אינסוף)
הוכח: $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ אם"ם הגבולות החד צדדים קיימים ושווים ל L (כלומר
$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$)

הוכחה: כיוון אחד: נניח $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ ולכן לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $0<|x-x_0|<\delta$ אזי $|f(x)-L|<\varepsilon$. בפרט, אם $0<x-x_0<\delta$ אזי $0<|x-x_0|<\delta$ ולכן $|f(x)-L|<\varepsilon$ ולכן $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$. ואם $0<x_0-x<\delta$ אזי $0<|x-x_0|<\delta$ ולכן $|f(x)-L|<\varepsilon$ ולכן $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L$.

בכיוון שני: $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$ ולכן לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta_1>0$ כך שלכל $0<x-x_0<\delta_1$ מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$ וקיים $\delta_2>0$ כך שלכל $0<x_0-x<\delta_2$ מתקיים $|f(x)-L|<\varepsilon$. ולכן עבור $\delta<\min(\delta_1,\delta_2)$ מתקיים שאם $0<x-x_0<\delta$ וגם $0<x-x_0<\delta$ אזי $|f(x)-L|<\varepsilon$ כלומר אם $0<|x-x_0|<\delta$ אזי $|f(x)-L|<\varepsilon$ כלומר $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$.

2. מצא את הגבולות הבאים:

a. $\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

פתרון: $\lim_{x\to\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1$. המעבר הלפני אחרון מותר בזכות התכונה של הרכבה: $\sin(x)$ רציפה, $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

b. $\lim_{x\to-\infty} x\left(x-\sqrt{x^2-\pi^3}\right)$

פתרון: $x\to-\infty$, $\sqrt{x^2-\pi^3}\to\infty$ ולכן $x-\sqrt{x^2-\pi^3}\to-\infty$ ולכן
$\lim_{x\to-\infty} x\left(x-\sqrt{x^2-\pi^3}\right)=+\infty$

.c $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$

פתרון: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}\dfrac{1-\cos x}{x}=1\cdot 0=0$

.d $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right]$

פתרון: $\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}=\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{(1-x)(1+x)}=\dfrac{1+x-2}{(1-x)(1+x)}=\dfrac{x-1}{(1-x)(1+x)}=-\dfrac{1}{1+x}$

מותר לנו לעשות את זה עבור $x\neq 1$, אבל זה בסדר כי הגבול בנקודה $x\to 1$ מדבר על סביבה של אחד לא כולל את אחד ($0<|x-1|$ לפי קושי, $1\neq x_n\to 1$ לפי היינה). ולכן

$\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right]=\lim\limits_{x\to 1}-\dfrac{1}{1+x}=-\dfrac{1}{2}$

.e $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}+10}{x-5}$

פתרון: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}+10}{x-5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{10}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-\dfrac{5}{\sqrt{x}}}=0$

.f $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-5)(3x^2-10)}{4x^3-5}$

פתרון: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-5)(3x^2-10)}{4x^3-5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-15x^2-10x+50}{4x^3-5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-\dfrac{15}{x}-\dfrac{10}{x^2}+\dfrac{50}{x^3}}{4-\dfrac{5}{x^3}}=\dfrac{3}{4}$

.g $\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{x}{3x^7}}$

פתרון: $g(x)=e^x$ רציפה בכל הממשיים, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{3x^7}=0$ ולכן

$\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{x}{3x^7}}=\lim\limits_{x\to\infty}g(f(x))=g(0)=e^0=1$

3. הוכח/הפרך: אם $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ אזי $\lim_{x\to\infty}[f(2x)-f(x)]=0$

הוכחה: $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ ולכן לכל $\frac{\varepsilon}{2}>0$ קיים $m>0$ כך שלכל $x>m$ מתקיים $|f(x)-L|<\frac{\varepsilon}{2}$.

בוודאי מתקיים $2x>x>m$ ולכן מתקיים $|f(2x)-L|<\frac{\varepsilon}{2}$ ולכן לכל $x>m$ מתקיים

$|f(2x)-f(x)-0|=|f(2x)-L+L-f(x)|\le|f(2x)-L|+|L-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

ובמילים אחרות $\lim_{x\to\infty}[f(2x)-f(x)]=0$

4.

a. תהיי פונקציה ממשית f כך ש $f(x)=-f(-x)$ לכל $x\ne 0$. נתון ש f רציפה באפסה. הוכח ש $f(0)=0$.

הוכחה: נתון $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$ נשתמש בהגדרת הגבול לפי היינה. נבנה שתי סדרות $0\ne x_n=\frac{1}{n}\to 0$, $0\ne y_n=-\frac{1}{n}\to 0$ אבל אז לפי היינה $f(0)=\lim f(x_n)=\lim f(y_n)$. ולכן

$$f(0)=\lim f(x_n)=\lim f(\frac{1}{n})=\lim -f(-\frac{1}{n})=\lim -y_n=-\lim y_n=-f(0)$$

ולכן $f(0)=-f(0)\Rightarrow f(0)=0$

b. תן דוגמא לפונקציה כזו, וודא שאכן היא מתאפסת באפס.

פתרון: $\sin(x)=-\sin(-x)$ והיא רציפה בכל הממשיים. אכן $\sin(0)=0$

5. נניח ו $\lim_{x\to x_0} f(x)=a$, ונניח ש g רציפה ב a. הוכח $\lim_{x\to x_0} g(f(x))=g(a)$ (רמז: האפסילון בהגדרת הגבול לפי קושי של הגבול של f הופך להיות הדלתא של הגדרת הגבול לפי קושי של $g(f(x))$).

הוכחה: נתון ש g רציפה ב a, לכן $\lim_{x\to a} g(x)=g(a)$ ולכן לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $0<|x-a|<\delta$ מתקיים $|g(x)-g(a)|<\varepsilon$.

נתון $\lim_{x\to x_0} f(x)=a$ ולכן לכל $\delta>0$ (במקום ε אנחנו משתמשים בסימון δ) קיים $\alpha>0$ כך שאם $0<|x-x_0|<\alpha$ אזי $|f(x)-a|<\delta$.

אבל אז לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ שעבורו קיים $\alpha>0$ כך שאם $0<|x-x_0|<\alpha$ אזי $|f(x)-a|<\delta$ ולכן $|g(f(x))-g(a)|<\varepsilon$ (במקרה $f(x)=a$ אזי $g(f(x))-g(a)=g(a)-g(a)=0<\varepsilon$). ולסיכום $\lim_{x\to x_0} g(f(x))=g(a)$.

6. מיין את נקודות אי הרציפות של הפונקציות הבאות: (רמז בדף הבא)

a. $\sin(\ln x^2)$

פתרון: ההרכבה אינה רציפה כאשר $\ln x^2$ אינה מוגדרת, כלומר כאשר $x=0$. נראה שהגבול החד צדדי $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin\left(\ln x^2\right)$ לא קיים ולכן זו נקודת אי רציפות מהמין השני. נוכיח זאת לפי היינה. נבנה 2 סדרות חיוביות ששואפות לאפס, אבל הגבולות של הפונקציה על הסדרות האלה שונים.

$x_k=\sqrt{e^{\frac{\pi}{2}-2\pi k}}$, $y_k=\sqrt{e^{-\frac{\pi}{2}-2\pi k}}$ קל לראות שסדרות אלה שואפות לאפס אבל שונות מאפס (שכן e בחזקת משהו ששואף למינוס אינסוף שואף לאפס). אבל

$\sin\left(\ln\left({x_k}^2\right)\right)=\sin\left(\ln\left(\sqrt{e^{\frac{\pi}{2}-2\pi k}}\right)^2\right)=\sin\left(\ln\left(e^{\frac{\pi}{2}-2\pi k}\right)\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\pi k\right)=1$ בצורה דומה

$\sin\left(\ln\left({y_k}^2\right)\right)=-1$ ולכן הגבול החד צדדי אינו קיים.

b. $\sin\left(\frac{1}{\ln x^2}\right)$

פתרון: נקודות האי רציפות נובעות מאיפוס המכנה ומנקודת אי ההגדרה של ה $\ln$. לכן נקודות אי הרציפות הינן $-1,0,1$.

עבור $x=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\ln x^2=-\infty$ ולכן $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\ln x^2}=0$ ומכיוון ש $\sin$ רציפה באפס ההרכבה שואפת לאפס, כלומר $\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{\ln x^2}\right)=0$ ולכן זו אי רציפות סליקה.

עבור $x=1$, נראה שהגבול החד צדדי $\lim\limits_{x\to 1^+}\sin\left(\frac{1}{\ln x^2}\right)=0$ אינו קיים ולכן זו אי רציפות מהמין השני.

ניקח את הסדרות $x_k=\sqrt{e^{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi k}}}$, $y_k=\sqrt{e^{\frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}}}$ קל לראות שסדרות אלה שואפות לאחד מכיוון ש

$e^0=1$, וגדולות ממש מאחד. $\sin\left(\frac{1}{\ln {x_k}^2}\right)=1$, $\sin\left(\frac{1}{\ln {y_k}^2}\right)=-1$ ולכן הגבול החד צדדי לא קיים.

עבור $x=-1$, זו נקודת אי רציפות מהמין השני עם הוכחה דומה.

c. $\frac{5x+4}{|5x+4|}$

פתרון: נקודת אי הרציפות היא כאשר המכנה שווה אפס, בנקודה $x=-\frac{4}{5}$. נשים לב שהפונקציה שווה בדיוק לאחד כאשר $x>-\frac{4}{5}$, מינוס אחד כאשר $x<-\frac{4}{5}$ ולא מוגדרת כאשר $x=-\frac{4}{5}$. לכן

הגבול הימני $\lim_{x\to\left(-\frac{4}{5}\right)^+}\frac{5x+4}{|5x+4|}=1$, הגבול השמאלי $\lim_{x\to\left(-\frac{4}{5}\right)^-}\frac{5x+4}{|5x+4|}=-1$. שני הגבולות החד צדדים קיימים וסופיים ושונים ולכן זו נקודת אי רציפות מהמין הראשון.

d. $e^{-\frac{1}{\sin x}}$

פתרון: נקודות אי הרציפות הן הנקודות בהן המכנה מתאפס, כלומר $x_k=\pi k$. בכל נקודה כזו, מצד אחד הסינוס חיובי ומהצד השני שלילי ולכן $\frac{1}{\sin x}$ שואף למינוס אינסוף מצד אחד ואינסוף מהצד השני. ולכן $e^{-\frac{1}{\sin x}}$ שואף לאפס מצד אחד, ולאינסוף מהצד השני. ולכן כל נקודות אי הרציפות הינן מהמין השני.

e. $e^{-\frac{1}{(\sin x)^2}}$

פתרון: נקודות אי הרציפות הן כמו בסעיף הקודם $x_k=\pi k$. $(\sin x)^2$ תמיד חיובי, ולכן $-\frac{1}{(\sin x)^2}$ שואף למינוס אינסוף ולכן $e^{-\frac{1}{(\sin x)^2}}$ שואף לאפס. ולכן כל נקודות אי הרציפות הינן סליקות.

רמז לתרגיל 6: על מנת להוכיח שאין לפונקציה f גבול בנקודה a מספיק למצוא שתי סדרות $a\neq x_n,y_n\to a$ כך שאחד הגבולות $\lim_{n\to\infty}f(x_n),\lim_{n\to\infty}f(y_n)$ אינו קיים או שהגבולות הנ"ל שונים.

<u>דוגמא</u>: הוכח שלפונקציה הבאה אין גבול בנקודה 0: $f(x)=\cos\left(\sqrt{\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)}\right)$

פתרון: יש למצוא שתי סדרות $0\neq x_n,y_n\to 0$ כמו שמצויין למעלה. יהיה הכי קל למצוא סדרות כך ש $f(x_n),f(y_n)$ קבועים שונים ללא תלות ב n.

למשל נרצה ש $f(x_n)=1,\ f(y_n)=-1$

אנו יודעים ש $\cos(2\pi n)=1,\cos(\pi+2\pi n)=-1$.

לכן אנחנו רוצים $\sqrt{\ln\left(\frac{1}{|x_n|}\right)}=2\pi n$

לכן רוצים $\ln\left(\frac{1}{|x_n|}\right)=(2\pi n)^2$

לכן $\frac{1}{|x_n|}=e^{(2\pi n)^2}$

ולבסוף $x_n=\frac{1}{e^{(2\pi n)^2}}$. קל לוודא ש $0\neq x_n\to 0$

באופן דומה $y_n=\frac{1}{e^{(\pi+2\pi n)^2}}$ ו $0\neq y_n\to 0$

ולכן לפי הבנייה,
$$f(x_n)=1\to 1$$
$$f(y_n)=-1\to -1$$

ולכן לפי היינה אין גבול בנקודה.