אלגברה ליניארית – תרגיל 5

<u>שאלה 1</u>

תהיי $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ העתקה ליניארית המוגדרת ע"י $T(x_1,x_2)=(-2x_1+2x_2, x_1-3x_2)$

מצא את $A=[T]_E$, המטריצה המייצגת של T בבסיס הסטנדרטי.

<u>שאלה 2</u>

תהי $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ההעתקה הלינארית המוגדרת על ידי

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+4x_2+5x_3 \\ 2x_2+6x_3 \\ 3x_3 \end{pmatrix}$$

א. מצא את A, המטריצה הסטנדרטית של T.

ב. האם T חד חד ערכית? האם T על? נמק!

<u>שאלה 3</u>

יהי $T:R^3 \to R^3$ העתקה ליניארית הנתונה ע"י הנוסחה

$T(x,y,z)=(x-2y,-y,z)$.

א) מצאו מטריצה A של T בבסיס הסטנדרטי.

ב) האם T הפיך? מצאו כל וקטורים $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ כך ש- $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

<u>שאלה 4</u>

נתונה העתקה ליניארית $T:R^3 \to R^3$ המוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3x+y \\ x-y+2z \\ y-\frac{3}{2}z \end{pmatrix}$

א. מצא בסיס ואת המימד של הגרעין של T.

ב. מצא בסיס ואת המימד של - $\operatorname{Im}T$.

ג. עבור אילו ערכי a הווקטור $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ a \end{pmatrix}$ שייך לתמונה של T ?

<u>שאלה 5</u>

תהיי $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ההעתקה הליניארית המוגדרת ע"י $T(x,y,z)=(x,y)$ מצא את המטריצה A המייצגת את T ביחס לבסיסים $B:=\{(1,0,1),(1,1,0),(0,1,0)\}$ בתחום ו $C:=\{(2,1),(-3,-1)\}$ בטווח.

שאלה 6

א. הוכח שלשתי מטריצות המייצגות את $T:V\to W$ (ביחס לבסיסים שונים) יש אותה דרגה.

ב. תנו דוגמה של העתקות ליניאריות $T:M_{2\times2}(\mathbb{R})\to M_{2\times2}(\mathbb{R})$ ו $S:M_{2\times2}(\mathbb{R})\to M_{2\times2}(\mathbb{R})$ כך ש $TS\neq ST$.

שאלה 7

נתונה המטריצה $A(a)=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}$. יהי $T_a:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י $T_a\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$

עבור אילו ערכים של הפרמטר a $\dim(\ker T_a)$ הוא מקסימאלי ועבור אילו ערכים של הפרמטר a $\dim(\operatorname{Im}T_a)$ הוא מקסימאלי.

שאלה 8

א. נתונה העתקה ליניארית $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י $T(f)=\begin{pmatrix}f(0)-f(1)\\f(0)\\f(1)\end{pmatrix}$.

i. מצאו מטריצה של T בבסיסים הסטנדרטיים.

ii. מצאו בסיס ומימד של $KerT$ ושל $\operatorname{Im}T$.

ב. נתונה העתקה $T:M_2(\mathbb{R})\to M_2(\mathbb{R})$ המוגדרת ע"י $T\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}a&-c\\-b&d\end{pmatrix}$.

i. הוכיחו ש T העתקה ליניארית.

ii. מצאו בסיס ומימד של $KerT$ ושל $\operatorname{Im}T$.

שאלה 9

נתונה מטריצה $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$. העתקה ליניארית $S:M_2(\mathbb{R})\to M_2(\mathbb{R})$ מוגדרת ע"י

$S(X)=AX+XA$ כאשר $X\in M_2(\mathbb{R})$.

א. הוכיחו כי S העתקה ליניארית.

ב. האם S הפיך? אם כן, מצאו את S^{-1}.

שאלה 10

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה **F**, ויהי $T:V\to V$ אופרטור לינארי המקיים: $T^4=T$.

א. הוכח: $V=\operatorname{Im}(T^3)+\operatorname{Ker}(T)$.

ב. האם הסכום בסעיף א' הוא ישר? נמק היטב.

<u>שאלה 11</u>

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F כך שב F $1+1\neq 0$ (מתמטיקאים אומרים בקיצור: המאפיין אינו 2) .

תהי $T\in Hom(V,V)$ המקיימת $T^2=I$. נסמן:

$W=\{w\in V \mid T(w)=w\}$ ו $U=\{u\in V \mid T(u)=-u\}$.

א. הראה ש U הוא תת מרחב של V. (כמובן, גם W הוא תת מרחב של V, אל תוכיח זאת!).

ב. הראה שאם $T(v)=z$ אז $v+z\in W$ ו $v-z\in U$.

ג. הוכח כי $V=U\oplus W$.

ד. הוכח או הפרך: לכל $v\in V$ מתקיים $T(v)=v$ או $T(v)=-v$