תרגול 10

9 ביולי 2013

דטרמיננטה

תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ריבועית. אזי הדטרמיננטה של A (סימון: $det(A), |A|$) היא פונקציה "המבשלת" ממקדמי A סקלאר ב $\mathbb{F}$. (בעזרת כפל וחיבור)

הדטרמיננטה של A נקבעת באופן יחיד ע"י שלושת התכונות הבאות:

1. לינאריות -

(א) אם A, B, C מטריצות כך ש $R_i(A) = R_i(B) + R_i(C)$ ולכל $j \neq i$ מתקיים $R_j(A) = R_j(B) = R_j(C)$ אזי $det(A) = det(B) + det(C)$ (למשל $det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}$)

(ב) אם $B \xrightarrow{\alpha R_i(A)\to R_i(A)} A$ (כפל בסקלאר) אזי $det(B) = \alpha \cdot det(A)$ (למשל $det\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ c & d \end{pmatrix} = \alpha det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$)

2. אם $B \xrightarrow{R_i(A)\leftrightarrow R_j(A)} A$(החלפת שורות) אזי $det(B) = -det(A)$

3. $det(I_n) = 1$

הערות: ישירות (או כמעט) נובע מההגדרה כי

1. אם ל A יש שורת אפסים או 2 שורות זהות או שורה אחת שהיא כפולה של השניה אזי $det(A) = 0$

2. אם $B \xrightarrow{R_i(A)+\alpha R_j(A)\to R_i(A)} A$ (הוספת כפולה של שורה אחת לשורה אחרת) אזי $det(A) = det(B)$ (כעת אנו יודעים איך משפיעות הפעולות האלמנטריות על הדטר')

3. עבור מטריצה A משולשית אזי $det(A)$ הוא מכפלת איברי האלכסון.

חישוב דטרמיננטה

שיטה א. דירוג לצורה משולשית:

תרגיל: תהא $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ חשב $det(A)$

פתרון:

$$\begin{aligned} det(A) &= -det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = -det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \\ &= = det\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = (1)\cdot(1)\cdot(-4) = -4 \end{aligned}$$

שיטה ב.־ פיתוח לפי שורה

הגדרה: תהא A מטריצה אזי המינור ה־ i,j (סימון: $M_{i,j}$) הוא הדטר' של תת מטריצה A המתקבלת ממחיקת שורה i ועמודה j

לדוגמא עבור $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ המינור $(2,1)$ הוא $M_{2,1} = det(\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix})$.

מהגדרת דטר' נובע כי $det(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = ad - bc$ וניתן לפתח

נוסחא רקורסבית (פיתוח לפי שורה i) להדטר' $det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{i,j}M_{i,j}$ (כי $M_{i,j}$ היא דטר' של מטריצה יותר קטנה מ A)

לדוגמא: נחשב את $det(A)$ לפי שורה 2:

$$\begin{aligned} det(A) &= \sum_{j=1}^{3}(-1)^{2+j}a_{2,j}M_{2,j} \\ &= (-1)^{2+1}a_{2,1}M_{2,1} + (-1)^{2+2}a_{2,2}M_{2,2} + (-1)^{2+3}a_{2,3}M_{2,3} \\ &= -(-1)det(\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}) + (-3)det(\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}) - 0\cdot det(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}) \\ &= [1\cdot(-4) - 3\cdot 5] - 3\cdot[0\cdot(-4) - 1\cdot 5] \\ &= [-19] - 3\cdot[-5] = -4 \end{aligned}$$

הערה: כמובן שפיתוח לפי כל שורה נותן אותה תוצאה.

תכונות של דטרמיננטה:

1. $det(A) = det(A^t)$ (מכאן נובע כי מה שנכון לגבי שורות נכון לגבי עמודות־ לדוגמא, 2 עמודות אפסים גורר דטר' שווה 0 , ניתן לפתח לפי עמודה וכו')
2. $det(AB) = det(A)\cdot det(B)$
3. $|A^k| = |A|^k$
4. אם A הפיכה $\Leftrightarrow det(A) \neq 0$. אם A הפיכה אזי מתקיים $det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$

5. אם $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ מרוכבת אזי $det(\bar{A})=\overline{det(A)}$ כאשר $(\overline{A})_{i,j}:=\overline{(A)_{i,j}}$ הצמדת כל האיברים במטריצה
הוכחה: $det(A)=\sum\limits_{i=1}^{m}\prod\limits_{k=1}^{n}a_{k,k_i}$ היא מכפלות וסכומים של אברי A. אם נצמיד כל איבר ב A נקבל את אותו ביטוי עם איברים צמודים $\sum\limits_{i=1}^{m}\prod\limits_{k=1}^{n}\overline{a_{k,k_i}}$. כיוון שהצמדה יכולה לעלות מעל סכומים ומכפלות (כלומר $\overline{x+y}=\bar{x}+\bar{y},\ \overline{xy}=\bar{x}\bar{y}$) נקבל $\overline{\sum\limits_{i=1}^{m}\prod\limits_{k=1}^{n}a_{k,k_i}}$ כלומר $\overline{det(A)}$.

תרגילים:

1. תהא מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ בטא בעזרת $det(A)$ את $det(2A)$.
פתרון: מכל שורה של A ניתן להוציא 2 גורם משותף. כל פעם שמוציאים סקלאר הדטר' מוכפלת באותו סקלאר לכן $det(2A)=2^n det(A)$.

2. תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה אנטי סימרית. הוכח: אם n אי זוגי אזי A לא הפיכה
פתרון: $A^t=-A$ ע"י הפעלת דטרמיננטה משני הצדדים נקבל
$det(A)=det(A^t)=det(-A)=(-1)^n det(A)=-det(A)$ ולכן $det(A)=0$
כלומר A אינה הפיכה.

3. יהיו A,B מטריצות דומות כלומר $B=PAP^{-1}$ (עבור מטריצה P הפיכה) הוכח $det(A)=det(B)$
פתרון: מכפליות של הדטר' נקבל:

$$\begin{aligned}det(B) &= det(PAP^{-1})=det(P)\cdot det(A)\cdot (P^{-1})\\ &= det(P)\cdot det(P^{-1})\cdot det(A)=det(A)\end{aligned}$$

4. $Q\in\mathbb{C}^{n\times n}$ מרוכבת אונטרית כלומר מתקיים $QQ^*=I$ (הגדרה: $Q^*=\bar{Q}^t$ כלומר $(Q^*)_{i,j}=\overline{(Q)_{j,i}}$)

   (א) מהו $|det(Q)|$ (כאן $|\cdot|$ הוא הערך המוחלט המרוכב)
   פתרון : $1=det(I)=det(Q)det(Q^*)=det(Q)\overline{det(Q^t)}=det(Q)\overline{det(Q)}=|det(Q)|^2$.
   ולכן $|det(Q)|=1$

   (ב) מתי קיים m טבעי כך ש $det(Q^m)=1$
   פתרון: לפי סעיף א ניתן לכתוב $det(Q)=cis(\theta)$ ואז רק אם θ מהצורה $\theta=2\pi\frac{k}{m}$ מתקיים
   $det(Q^m)=det(Q)^m=cis(2\pi\frac{k}{m})^m=cis(2\pi k)=1$.

5. נגדיר $\mathbb{R}^{n\times n} \ni A_n=\begin{pmatrix}\alpha & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \alpha & 1 & & \vdots\\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & 1\\ \vdots & & \ddots & \alpha & 1\\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \alpha\end{pmatrix}$ חשב $det(A_n)$

פתרון: נחבר לשורה הראשונה את שאר השורות ונקבל

$$\begin{aligned}
det(A_n) &= det\begin{pmatrix} \alpha+(n-1) & \alpha+(n-1) & \alpha+(n-1) & \cdots & \alpha+(n-1) \\ 1 & \alpha & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \alpha & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \\
&= [\alpha+(n-1)]\cdot det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \alpha & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \\
&= [\alpha+(n-1)]\cdot det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \alpha-1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \alpha-1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha-1 \end{pmatrix} \\
&= [\alpha+(n-1)]\cdot(\alpha-1)^{n-1}
\end{aligned}$$

מטירצת הקופקטורים והמטריצה הצמודה

הגדרה: תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ אזי מטריצת הקופקטורים (מסומן $cof(A)\in\mathbb{F}^{n\times n}$) מוגדרת $(cof(A))_{i,j}=(-1)^{i+j}M_{i,j}$ כאשר $M_{i,j}$ הוא המינור i,j . (שימו לב שהביטוי דומה לביטוי שמופיע בפיתוח דטר' לפי שורה רק בלי התוספת של הכפלה באיבר ה $a_{i,j}$)

דוגמא: $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ מצא את $cof(A)$

פתרון: באופן כללי $cof(A)=\begin{pmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}$

$$M_{1,1}=det(\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix})=12,\ M_{2,1}=det(\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -4 \end{pmatrix})=-19$$

$$M_{3,1}=det(\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 0 \end{pmatrix})=15$$

ולכן (עם חישובים נוספים) $cof(A)=\begin{pmatrix} 12 & -4 & 0 \\ 19 & -5 & 1 \\ 15 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

הגדרה: תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ אזי המטריצה הצמודה היא $adj(A)=[cof(A)]^t$.

משפט: $A\cdot adj(A)=|A|\cdot I_n$ (בפרט אם A הפיכה אזי $A^{-1}=\frac{adj(A)}{|A|}$

דוגמא: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 12 & -4 & 0 \\ 19 & -5 & 1 \\ 15 & -5 & 1 \end{pmatrix}^t=-4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{-4}\cdot\begin{pmatrix} 12 & -4 & 0 \\ 19 & -5 & 1 \\ 15 & -5 & 1 \end{pmatrix}^t$$

תרגיל: תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה הוכח : $|adj(A)|=|A|^{n-1}$

הוכחה: נסמן $0\neq\alpha=|A|$ (כיוון ש A הפיכה) לפי משפט מתקיים $A\cdot adj(A)=\alpha\cdot I_n$ ולכן $\alpha\cdot|adj(A)|=|A|\cdot|adj(A)|=|\alpha I_n|=\alpha^n|I_n|=\alpha^n$. נחלק ב α ונקבל את הדרוש.

כלל קרמר

משפט (כלל קרמר): תהא $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה אזי למערכת $Ax=b$ יש פתרון יחיד.
הפתרון הוא $x_i=\frac{det(A_i)}{det(A)}$ כאשר A_i היא המטריצה A שהחלפנו לה את העמודה ה־i בוקטור b.

תרגיל: נתונה המערכת $\begin{cases} x-2y & =1 \\ x-y & =5 \end{cases}$ מצא את הפתרון שלה בעזרת כלל קרמר

פתרון: $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ A_1=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

ולפי קרמר $x=\frac{det(A_1)}{det(A)}=\frac{9}{1}=9,\ y=\frac{det(A_2)}{det(A)}=\frac{4}{1}=4$.

תרגיל: $\begin{cases} x-2y+z & =1 \\ x-y & =5 \end{cases}$ מצא את הפתרון שלה בעזרת כלל קרמר

פתרון: נחשוב על z נתון ונקבל את המערכת $\begin{cases} x-2y & =1-z \\ x-y & =5 \end{cases}$ ואז כמו קודם

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ A_1=\begin{pmatrix} 1-z & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix} 1 & 1-z \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

ולפי קרמר $x=\frac{det(A_1)}{det(A)}=\frac{z-9}{1}=z-9,\ y=\frac{det(A_2)}{det(A)}=\frac{4+z}{1}=4+z$

ולכן הפתרון הכללי הוא $\begin{pmatrix} t-9 \\ 4+t \\ t \end{pmatrix}$.

תרגיל: נגדיר $A_n=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ חשב $det(A_n)$

פתרון: נפתח לפי שורה ראשונה

$$
\begin{aligned}
det(A_n) &= 2\cdot det(A_{n-1}) - (-1)\cdot det(\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & -1 & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}) \\
&= 2\cdot det(A_{n-1}) + (-1)\cdot det(A_{n-2}) + 1\cdot det(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & & 0 \\ 0 & 2 & -1 & & \vdots \\ \vdots & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix}) \\
&= 2\cdot \quad det(A_{n-1}) - det(A_{n-2})
\end{aligned}
$$

קיבלנו נוסחא רקורסבית. נבדוק תנאי התחלה :

$$det(A_1) = det((2)) = 2,\ det(A_2) = det(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}) = 3$$

לפי נוסחא הרקורסיה שמצאנו $det(A_3) = 2\cdot 3 - 2 = 4$. ניתן להוכיח באינדוקציה כי $det(A_n) = n+1$ (תרגיל)