תרגול 9- יחס סדר

עוד דוגמאות ליחס שקילות:

<u>דוגמא1</u>: נתונה קבוצה $A=\{1,2,3,4\}$ ויחס על הקבוצה
$R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$

(קל לראות שזה יח"ש...)

נחשב מחלקות שקילות:

$$[1]=\{1,2\}=[2] \quad , \quad [3]=\{3,4\}=[4]$$

<u>דוגמא2</u>: נתונה קבוצה $A\neq\emptyset$ סופית. נגדיר יחס R על $P(A)$:

$$R=\{\ (X,Y)\in P(A)\times P(A)\ \mid\ |X|=|Y|\ \}$$

(כלומר כל הזוגות של תתי קבוצות שמספר האיברים בהם זהה)

נוכיח שהוא יח"ש:

רפלקסיבי: לכל $X\in P(A)$ כמובן $|X|=|X|$ $\Leftarrow$ $(X,X)\in R$

סימטרי: נניח $X,Y\in P(A)$ כך ש $(X,Y)\in R$ $\Leftarrow$ $|X|=|Y|$ $\Leftarrow$ $(Y,X)\in R$

טרנזיטיבי: נניח $X,Y,Z\in P(A)$ כך ש $(X,Y),(Y,Z)\in R$ זה אומר ש
$|Y|=|Z|\ ,\ |X|=|Y|$ ולכן $|X|=|Z|$ $\Leftarrow$ $(X,Z)\in R$

מהן מחלקות השקילות?

$$[X]=\{Y\in P(A)\mid (X,Y)\in R\}=\{Y\in P(A)\mid\ |Y|=|X|\ \}$$

מחלקת השקילות היא כל תתי הקבוצות שיש להן מספר אברים כמו לX, כך
אם לA יש n איברים אז יש $n+1$ מחלקות שקילות (אחת לכל גודל אפשרי).

יחס סדר

<u>הגדרה</u>: תהי A קבוצה, יחס R על A נקרא יחס סדר חלקי אם הוא רפלקסיבי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי.
הזוג הסדור (A,R) נקרא קבוצה סדורה חלקית (קס"ח).
(לפעמים מסמנים $(A,\leq)$ - שימו לב שהכוונה לא ליחס "קטן או שווה" אלא ליחס סדר חלקי כלשהוא)

<u>הגדרה</u>: תהי A קבוצה, יחס סדר חלקי R על A נקרא יחס סדר מלא (או יחס סדר ליניארי) אם לכל $a,b\in A$ מתקיים $(a,b)\in R$ או $(b,a)\in R$. הזוג הסדור (A,R) נקרא קבוצה סדורה ליניארית.

__דוגמאות__

1. ראינו בתרגיל שהיחס "קטן או שווה" על $\mathbb{Z}$ הוא יחס סדר חלקי. זה גם יחס סדר מלא כי לכל 2 מספרים $a, b \in \mathbb{Z}$: $b \leq a$ או $a \leq b$

2. היחס "מחלק את" המוגדר על $\mathbb{N}$ הוא יחס סדר חלקי

- רפלקסיביות: לכל $a \in \mathbb{N}$ מתקיים $a = a \cdot 1$ כלומר $a|a$.
- אנטי-סימטריות: לכל $a, b \in \mathbb{N}$ אם $a|b$ אזי קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $b = a \cdot n$.
  אם $b|a$ אזי קיים $m \in \mathbb{N}$ כך ש $a = b \cdot m$.
  כעת $a = b \cdot m = a \cdot nm$. לכן $nm = 1$, ומכיוון ש $n, m \in \mathbb{N}$ בהכרח $n = m = 1$, כלומר $a = b$.
- טרנזיטיביות: לכל $a, b, c \in \mathbb{N}$ אם $a|b$ אזי קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $b = a \cdot n$.
  אם $b|c$ אזי קיים $m \in \mathbb{N}$ כך ש $c = b \cdot m$.
  וכעת $c = b \cdot m = a \cdot nm$, כלומר $a|c$.

אבל זה לא יחס סדר מלא כי למשל 5 ו-7 הם לא ברי השוואה.

3. עבור קבוצה $A = \{1,2,3\}$ היחס "מוכל שווה" על $\mathrm{P(A)}$ הוא יחס סדר חלקי אבל לא מלא כי למשל $\{2,3\}$, $\{1,2\}$ הם לא ברי השוואה.

__הגדרה__: תהי (A, R) קבוצה סדורה חלקית.
אבר $a \in A$ נקרא R-מינימלי אם לא קיים $a \neq b \in A$ כך ש $(b, a) \in R$.
אבר $a \in A$ נקרא R-מקסימלי אם לא קיים $a \neq b \in A$ כך ש $(a, b) \in R$.

איבר מינימאלי/מקסימאלי לא חייב להיות יחיד!

למשל:

- ליחס "קטן או שווה" המוגדר על $\mathbb{N}$ 1 הוא איבר מינימאלי ואין איבר מקסימאלי.
- ליחס "קטן או שווה" המוגדר על $\mathbb{Z}$ אין איבר מינימאלי ואין מקסימאלי.
- ליחס "מחלק את" המוגדר על $\mathbb{N}$ 1 הוא איבר מינימאלי ואין איבר מקסימאלי
- ליחס "מחלק את" המוגדר על $\mathbb{N}\backslash\{1\}$ יש המון איברים מינימאליים (2,3,5,7,..) ואין איבר מקסימאלי.
- ליחס "מוכל או שווה" יש איבר מינימאלי $\emptyset$

עוד דוגמא:

נסתכל על קבוצת כל המילים שניתן להרכיב מ 0 ו-1.
$A = \{0, 1, 00, 11, 01, 10, 0001101, \dots\}$

ונגדיר יחס שיסומן ע"י $\ll$ באופן הבא:

$u \ll w$ (כלומר ש $(u,w) \in R$) אם u היא רישא של w. כלומר ש u מופיעה בתחילת המילה w. כלומר ש- $w = ua_1a_2 \dots a_m$ כאשר a_j הם אותיות כלשהן.

למשל $011010001 \ll 0110$, $100 \ll 10$, $01001 \ll 01$ וכדומה

זהו יחס סדר חלקי:

- רפלקסיבי: כל מילה היא רישא של עצמה ולכן תמיד $w \ll w$
- אנטי סימטרי: נניח $u \ll w,\ w \ll u$ זה אומר שכל מילה היא רישא אחת של השנייה- כך שאלו בהכרח אותן המילים $u = w$
- טרנזיטיבי: נניח $u \ll w,\ w \ll h$. אזי $h = wb_1b_2 \dots b_k$ כאשר b_i הם אותיות (1 או 0) וגם $w = ua_1a_2 \dots a_m$ כאשר a_j הם אותיות כלשהן. נקבל ש- $h = ua_1a_2 \dots a_mb_1b_2 \dots b_k$ כלומר ש $u \ll h$.

זהו לא יחס סדר לינארי כי למשל לא ניתן להשוות בין 0101 ל- 1010 (אף אחד לא רישא של השני).

האיברים המינימאליים הם 0 ו- 1. (מילים עם אות יחידה).

אין איברים מקסימאליים (שכן לכל מילה ניתן להוסיף עוד אותיות).