שיכון של משטחים

הגדרה ־ אימרסציה Immersion

אימרסיה זה שיכון $f:M\to N$ ‏(M יריעה) כך שהמרחב המשיק T_pM בכל נקודה p זהה למרחב המשיק $T_{f(p)}f\left(M\right)$.

הגדרה ־ Embedding

כמו אימרסיה, אבל גם חח"ע וחלק.

דוגמה

אם יש לנו גליל $\left(z,\theta\right)$, אפשר לעשות לו שיכון ב־$\mathbb{R}^3$:

$$f\left(z,\theta\right)=\left(z\cos\theta,z\sin\theta,z\right)$$

זה אמנם נותן לנו חרוט, אבל זה עדיין אימרסיה, וגם Embedding פרט לנקודה אחד. אם נרצה שזה יראה כמו גליל ניקח:

$$f\left(z,\theta\right)=\left(\cos\theta,\sin\theta,z\right)$$

הגדרה ־ יריעות לא אוריינטביליות

יש משטחים שעליהם אי אפשר להגדיר אוריינטציה ־ למשל רצועת מוביוס. אי אפשר להגדיר בצורה אחידה את האוריינטציה של היריעה, איזה צד למעלה ואיזה למטה ־ כי אפשר לטייל לאורך היריעה ולהגיע לאותו מקום עם אוריינטציה הפוכה.

אם יש לנו מפה

$$r:U\to M$$

$$\left(u,v\right)\mapsto r\left(u,v\right)\in\mathbb{R}^3$$

אז אפשר להגדיר תבנית יסודית ראשונה:

$$\mathrm{d}\gamma_a:T_aU\to T_AM$$

$$I\left(x,y\right)\to g=\mathrm{d}\gamma_a^t\cdot\mathrm{d}\gamma_a$$

$$I:T_aU\times T_aU\to\mathbb{R}$$

דוגמה - קואורדינטות פולריות

$$(r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

עדיין יש לנו נקודה, אבל במקום לצייר אותה לפי הx,y שלה מציירים אותה לפי הr,θ שלה. למשל מעגל יתואר במפה שלנו באמצעות קו ישר. נחשב את מטריצת יעקובי שלה:

$$\mathrm{d}\gamma = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}\theta} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

ולפי זה את התבנית היסודית הראשונה - המטריצה g:

$$\mathrm{d}\gamma^t \mathrm{d}\gamma = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

בעזרת זה אפשר לחשב אורכי עקומות:

$$\int \sqrt{g_{ij}\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j} = \int \sqrt{g_{11}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^1 + 2g_{12}\mathrm{d}x^1\mathrm{d}x^2 + g_{22}\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y^2} =$$

$$= \int \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + r^2}\,\mathrm{d}\theta = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + r^2\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

דוגמה - קואורדינטות כדוריות

$$(r,\theta,\varphi) \mapsto (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$$

$$\varphi \in [0,2\pi) \qquad \theta \in [0,\pi]\,, r \in [0,\infty)$$

$$\mathrm{d}\gamma = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$$

ולכן אלמנט אורך בקואורדינטות כדוריות הוא:

$$\int \sqrt{\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2}$$

סימון של פיסיקאים

נגזרת לפי t, פרמטר הזמן, תסומן:

$$\dot{f}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$$

הצגת משטח בצורה סתומה

נתמקד במשטחים ב־$\mathbb{R}^3$. הצגה מפורשת היא פרמטריזציה - $r:U\to\mathbb{R}^3$.
הצגה סתומה היא ייצוג של המשטח בתור אוסף הפתרונות של פונקציה סקלרית - $F(x,y,z)=0$
כלומר לכל $\gamma(t)\in\mathbb{R}^3$ מתקיים $\forall_t F(\gamma(t))=0$. אפשר לגזור לפי t:

$$0=\frac{\mathrm{d}F(\gamma(t))}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}F(x(t),y(t),z(t))}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

ומזה יוצא ש:

$$\langle\nabla F,r\rangle=0$$

כאשר

$$r:=\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}$$

הנורמל הוא:

$$\hat{n}=\frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}$$

ואם

$$\gamma:U\to\mathbb{R}^3$$

אז

$$\gamma_u:=\frac{\mathrm{d}\vec{\gamma}}{\mathrm{d}u}\qquad\gamma_v:=\frac{\mathrm{d}\vec{\gamma}}{\mathrm{d}v}$$

והנורמל הוא

$$\hat{n}=\frac{\vec{\gamma}_u\times\vec{\gamma}_v}{\|\vec{\gamma}_u\times\vec{\gamma}_v\|}$$

תבנית יסודית שנייה

$$n : M^{\subseteq\mathbb{R}^3} \to S^2$$

$$\rho : U \to M \to S^2$$

זה נותן מיפוי מהמפה שלנו לכדור ־ היריעה שלנו יכולה להיות כל מיני דברים, ו־ρ מתארת כיוון, נקודה בכדור היחידה.

$$\mathrm{d}\gamma_a\left(x\right) \in T_A M$$

$$\mathrm{d}\rho_a\left(x\right) \in T_{n(A)} S^2$$

הגדרה

תבנית יסודית שניה של משטח רגולרי M בנק' A מוגדרת כתבנית בי־לינארית:

$$II_a : T_a U \times T_a U \to \mathbb{R}$$

$$\gamma\left(a\right) = A$$

כאשר

$$II_a\left(x,y\right) = -\left\langle \mathrm{d}\gamma_a\left(x\right), \mathrm{d}\rho_a\left(\gamma\right)\right\rangle$$

זה בעצם אומר ־ איך השתנה הנורמל כאשר הולכים לכיוון מסויים?