אלגברה לינארית 2 (88113) – פתרון בחינה (מועד א')

פרופ' רון עדין

הפתרונות כאן מנוסחים בקיצור נמרץ.

בהצלחה !

.1

א. הגדירו: מכפלה פנימית.

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F}=\mathbb{R}$ או $\mathbb{F}=\mathbb{C}$). מכפלה פנימית על V היא פונקציה $\langle \bullet,\bullet\rangle : V\times V\to\mathbb{F}$ המקיימת:

- לינאריות במשתנה ראשון: $\langle c_1v_1+c_2v_2,w\rangle = c_1\langle v_1,w\rangle + c_2\langle v_2,w\rangle$
- (אם $\mathbb{F}=\mathbb{C}$) הרמיטיות: $\langle w,v\rangle=\overline{\langle v,w\rangle}$ לכל $v,w\in V$

  (אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$) סימטריות: $\langle w,v\rangle=\langle v,w\rangle$ לכל $v,w\in V$
- חיוביות: $\langle v,v\rangle\ge 0$ לכל $v\in V$, ושוויון אם ורק אם $v=\vec{0}$

ב. נסחו והוכיחו את אי-שוויון קושי-שוורץ (כולל תנאי השוויון).

ניסוח: יהי V מרחב מכפלה פנימית (מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$). אזי $|\langle v,w\rangle|\le\|v\|\|w\|$ לכל $v,w\in V$, ומתקיים שוויון אם ורק אם v,w תלויים לינארית. (לא תובא כאן הוכחה)

.2

א. הגדירו: דטרמיננטה של מטריצה.

תהי $A=(a_{ij})\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה ריבועית. הדטרמיננטה שלה היא

$$\det(A):=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^{n}a_{i,\sigma(i)}$$

כאשר הסכום הוא על כל התמורות σ של $1,\ldots,n$ ו- $\operatorname{sgn}(\sigma)$ הוא הסימן של התמורה σ.

ב. הוכיחו: (דטרמיננטת ונדרמונדה)

$$\det\begin{pmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1}\end{pmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)\qquad(\forall n\ge 2)$$

נוכיח באינדוקציה על n. עבור $n=2$: $\begin{vmatrix}1 & x_1\\ 1 & x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1$.

שלב האינדוקציה: נניח שהוכחנו עבור $n=k-1$; נוכיח עבור $n=k$. נבצע על המטריצה את פעולות השורה $R_i\leftarrow R_i-R_1$ (עבור $2\le i\le k$) ונפתח לפי עמודה ראשונה:

$$\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{k-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{k-1}\\ 1 & x_3 & x_3^2 & \ldots & x_3^{k-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_k & x_k^2 & \ldots & x_k^{k-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{k-1}\\ 0 & x_2-x_1 & x_2^2-x_1^2 & \ldots & x_2^{k-1}-x_1^{k-1}\\ 0 & x_3-x_1 & x_3^2-x_1^2 & \ldots & x_3^{k-1}-x_1^{k-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & x_k-x_1 & x_k^2-x_1^2 & \ldots & x_k^{k-1}-x_1^{k-1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_2-x_1 & x_2^2-x_1^2 & \ldots & x_2^{k-1}-x_1^{k-1}\\ x_3-x_1 & x_3^2-x_1^2 & \ldots & x_3^{k-1}-x_1^{k-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_k-x_1 & x_k^2-x_1^2 & \ldots & x_k^{k-1}-x_1^{k-1}\end{vmatrix}$$

עכשיו נבצע את פעולות העמודה $C_i \leftarrow C_i - x_1 C_{i-1}$ (עבור $2 \le i \le k-1$) ונוציא גורם משותף $x_{i+1} - x_1$ משורה $1 \le i \le k-1$:

$$= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_2^{k-2}(x_2 - x_1) \\ x_3 - x_1 & x_3(x_3 - x_1) & \dots & x_3^{k-2}(x_3 - x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_k - x_1 & x_k(x_k - x_1) & \dots & x_k^{k-2}(x_k - x_1) \end{vmatrix} = \prod_{i=2}^{k}(x_i - x_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{k-2} \\ 1 & x_3 & \dots & x_3^{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_k & \dots & x_k^{k-2} \end{vmatrix}$$

שימוש בהנחת האינדוקציה יסיים את ההוכחה.

.3

א. הוכיחו: אם למטריצות $A, B \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ יש אותו פולינום אופייני ואותו פולינום מינימלי, אז הן דומות זו לזו.

עבור מטריצות מעל שדה סגור אלגברית כמו $\mathbb{C}$, הפ״א מתפרק לגורמים ליניאריים ולכן קיימת צורת ז'ורדן. מספיק להראות של-A ול-B יש אותה צורת ז'ורדן. נחלק למקרים, לפי מספר הע״ע השונים (מספרם, ערכיהם והריבויים האלגבריים נקבעים ע״י הפ״א):

3 ע״ע שונים a,b,c (כולם בעלי ר״א 1): צורת ז'ורדן היא $J_1(a) \oplus J_1(b) \oplus J_1(c)$.

2 ע״ע שונים (a בעל ר״א 2, b בעל ר״א 1): עבור פ״מ $(x-a)^2(x-b)$ צ״ז היא בהכרח $J_2(a) \oplus J_1(b)$, ועבור פ״מ $(x-a)(x-b)$ צ״ז היא בהכרח $J_1(a) \oplus J_1(a) \oplus J_1(b)$.

ע״ע יחיד a (בעל ר״א 3): עבור פ״מ $(x-a)^3$ צ״ז היא בהכרח $J_3(a)$, עבור פ״מ $(x-a)^2$ צ״ז היא $J_2(a) \oplus J_1(a)$, ועבור פ״מ $x-a$ צ״ז היא $J_1(a) \oplus J_1(a) \oplus J_1(a)$.

ב. תנו דוגמא של זוג מטריצות $A, B \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ עם אותו פולינום אופייני ואותו פולינום מינימלי, שאינן דומות זו לזו. נמקו.

$A = J_2(0) \oplus J_2(0)$, $B = J_2(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(0)$ הן מטריצות בצורות ז'ורדן, עם גדלי בלוקים שונים (ולכן אינן דומות) אך עם אותו פ״א x^4 ואותו פ״מ x^2.

.4 יהי $W = \operatorname{span}\{(1,0,-1),(1,2,3)\}$ תת-מרחב של $V = \mathbb{R}^3$.

א. מצאו בסיס אורתונורמלי $\{e_1, e_2\}$ עבור W (ביחס למכפלה הפנימית הרגילה).

תהליך גרם-שמידט ייתן, למשל: $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

ב. השלימו לבסיס אורתונורמלי $\{e_1, e_2, e_3\}$ עבור V כולו.

ניקח למשל $v_3 = (1,0,0) \notin W$. תהליך גרם-שמידט ייתן $e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$.

ג. נגדיר אופרטור ליניארי $T: V \to V$ ע״י:

$$T(e_1) = e_2, \quad T(e_2) = e_1, \quad T(e_3) = -e_3$$

מצאו את כל הערכים העצמיים והמרחבים העצמיים של T.

המטריצה המייצגת את T לפי הבסיס $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ היא $[T]_E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

הפ״א הוא $(x+1)^2(x-1)$, הע״ע הם ± 1, והמרחבים העצמיים הם $V_1 = \operatorname{span}\{e_1 + e_2\}$, $V_{-1} = \operatorname{span}\{e_1 - e_2, e_3\}$.

.5

א. הגדירו: אופרטור הרמיטי, אנטי-הרמיטי, אוניטרי, נורמלי.

עבור אופרטור ליניארי $T:V\to V$ על מרחב מכפלה פנימית V:

T הוא הרמיטי אם $T^*=T$, אנטי-הרמיטי אם $T^*=-T$, אוניטרי אם $TT^*=I$

ונורמלי אם $TT^*=T^*T$.

ב. יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל $\mathbb{R}$, ויהי $T:V\to V$ אופרטור אנטי-הרמיטי. הוכיחו: לכל $v\in V$, $\langle T(v),v\rangle=0$.

לכל $v\in V$:

$$\langle T(v),v\rangle=\langle v,T^*(v)\rangle=\langle v,-T(v)\rangle=\langle -T(v),v\rangle=-\langle T(v),v\rangle$$

ולכן $\langle T(v),v\rangle=0$.

ג. יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל $\mathbb{R}$, ויהי $T:V\to V$ אופרטור ליניארי המקיים $\langle T(v),v\rangle=0$ לכל $v\in V$. הוכיחו: T אנטי-הרמיטי. (<u>רמז:</u> קחו $v=v_1+v_2$ כאשר $v_1,v_2\in V$.)

לכל $v_1,v_2\in V$:

$$0=\langle T(v_1+v_2),v_1+v_2\rangle=\langle T(v_1),v_1\rangle+\langle T(v_1),v_2\rangle+\langle T(v_2),v_1\rangle+\langle T(v_2),v_2\rangle.$$

לפי הנתון גם $\langle T(v_1),v_1\rangle=\langle T(v_2),v_2\rangle=0$, ולכן $\langle T(v_1),v_2\rangle+\langle T(v_2),v_1\rangle=0$. מכאן:

$$\langle T(v_1),v_2\rangle=-\langle T(v_2),v_1\rangle=-\langle v_2,T^*(v_1)\rangle=-\langle T^*(v_1),v_2\rangle.$$

קיבלנו כי $\langle T(v_1)+T^*(v_1),v_2\rangle=0$ לכל $v_2\in V$, ולכן $T(v_1)+T^*(v_1)\in V^{\perp}=\{\vec{0}\}$,

כלומר $T^*(v_1)=-T(v_1)$ לכל $v_1\in V$. לכן $T^*=-T$.