מבוא לחוגים ומודולים - תרגול 6

מימד קרול

הגדרה:

יהי R חוג חילופי. מימד קרול (Krull dimension) של R הוא המספר הגדול ביותר d שעבורו קיימת שרשרת של אידאלים ראשוניים אמיתיים

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq P_2 \subsetneq \cdots \subsetneq P_d \qquad (d = \dim R = K\text{-}\dim R)$$

דוגמאות:

א. $\dim R = 0 \iff$ כל אידאל ראשוני הוא מקסימלי.

ב. $\dim \mathbb{Z} = 1$, כי $\{0\} \subsetneq p\mathbb{Z}$ שרשרת מאורך מקסימלי.

ג. באופן כללי, אם R תחום ראשי, אז $\dim R = 1$. $(R \neq 0)$

הסבר: $\{0\}$ ראשוני כי R תחום שלמות.

אם $P \neq 0$ אידאל ראשוני של R, אז P מקסימלי (כי R תחום ראשי),

ולכן $\{0\} \subsetneq P$ שרשרת מאורך מקסימלי.

ד. $\dim F[x_1, x_2, \dots] = \infty$.

$$\langle x_1 \rangle \subsetneq \langle x_1, x_2 \rangle \subsetneq \cdots$$

תרגיל:

יהי R חוג חילופי $(\neq 0)$. אז $\dim R[x] \geq \dim R + 1$.

הוכחה:

תהי $P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_d$ שרשרת של אידאלים ראשוניים אמיתיים ב-R. נשים לב כי

$$P_0[x] \subsetneq P_1[x] \subsetneq \cdots \subsetneq P_d[x] \subsetneq \langle P_d, x \rangle$$

שרשרת של אידאלים ראשוניים אמיתיים של $R[x]$.

$$P[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i \;\middle|\; \alpha_i \in P \right\}$$

נוכיח: $P_i[x]$ ראשוני ב- $R[x]$ כי $R[x]/P_i[x] \cong \underbrace{(R/P_i)}_{\text{תחום שלמות}}[x]$ תחום שלמות.

$<P_d, x>$ ראשוני ב- $R[x]$ כי $R[x]/<P_d,x> \cong R/P_d$ תחום שלמות.

לכן $\dim R[x] \geq \dim R+1$. $\square$

<u>הערה:</u>

באופן כללי, $\dim R + 1 \leq \dim R[x] \leq 2\dim R + 1$.

אם R נותרי, אז $\dim R[x] = \dim R + 1$.

<u>מיקום מרכזי</u>

<u>הגדרה:</u>

יהי R חוג ותהי $S \subseteq R$ תת-קבוצה המקיימת:

א. כל איברי S הם רגולריים (כלומר לא מחלקי אפס ולא 0).

ב. S סגורה לכפל.

ג. $S \subseteq Z(R)$.

ד. $1 \in S$.

במילים: S היא תת-מונואיד כפלי של איברים רגולריים.

נסמן ב- $S^{-1}R$ את קבוצת מחלקות השקילות של $S \times R$ תחת היחס

$$(s,r) \sim (s',r') \iff \exists t \in S: \ t(sr'-rs')=0 \iff sr'=rs'$$

את המחלקה של (s,r) נסמן $\frac{r}{s}$.

לחוג $S^{-1}R$ קוראים <u>המיקום</u> (localization) של R ב-S.

<u>הערה:</u>

$$i: R \hookrightarrow S^{-1}R$$
$$r \longmapsto \frac{r}{1}$$

התכונה האוניברסלית של מיקום:

אם יש הומומורפיזם $f:R\longrightarrow T$ כך ש- $f(S)\subseteq T^{\times}$ (כלומר איברי S נשלחים לאיברים הפיכים ב-T), אז קיים יחיד $g:S^{-1}R\to T$ כך ש- $f=g\circ i$.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & T \\ S^{-1}R \arrow[ur, dashed, "\exists! g"'] & \end{tikzcd}$$

דוגמה:

$R=\mathbb{Z}$, $S=\{3^k \mid k\in\mathbb{N}_0\}$. $S^{-1}R\cong\mathbb{Z}[\frac{1}{3}]$

הגדרה:

יהי R תחום שלמות. המיקום של R ב- $S=R\setminus\{0\}$ נקרא שדה השברים של R (fraction field), נסמן אותו $\mathrm{Frac}(R)$.

זה באמת שדה.

דוגמה:

א. שדה השברים של $\mathbb{Z}$ הוא $\mathbb{Q}$.

ב. מי שדה השברים של $F[x]$? זהו חוג הפונקציות הרציונליות

$$F(x)=\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\;\middle|\; f(x),g(x)\in F[x],\ g(x)\neq 0\right\}$$

ג. $\mathrm{Frac}(F[[x]])=F((x))$.

ד. אם R תחום שלמות, $\mathrm{Frac}(R[x])=(\mathrm{Frac}(R))(x)$.

הגדרה:

יהי R חוג חילופי. נאמר ש-R חוג מקומי (local ring) אם יש לו אידאל מקסימלי יחיד.

דוגמה:

$F[[x]]$ הוא חוג מקומי עם האידאל המקסימלי היחיד $\langle x\rangle$.

דוגמה:

יהי $p\in\mathbb{Z}$ ראשוני. אז $S=\mathbb{Z}\setminus p\mathbb{Z}$ סגורה לכפל, $\mathbb{Z}_{<p>}=S^{-1}\mathbb{Z}$ הוא חוג מקומי. האידאל המקסימלי שלו הוא $p\mathbb{Z}_{<p>}$.

$$\mathbb{Z}_{<p>}=\left\{\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}\ \middle|\ p\nmid b\right\}$$

$$M=p\mathbb{Z}_{<p>}=\left\{\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}\ \middle|\ p\mid a,\ p\nmid b\right\}$$

הוכחה:

M אידאל – תרגיל לבית.

נראה מקסימליות: אם $M\subsetneq J\subsetneq\mathbb{Z}_{<p>}$, אז יהיה $\frac{x}{y}\in J\setminus \underset{p\mathbb{Z}_{<p>}}{\underbrace{M}}$.

אז $p\nmid x,y \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^{-1}=\frac{y}{x}\in\mathbb{Z}_{<p>} \Rightarrow J$ מכיל איבר הפיך, בסתירה.

דרך אחרת: אפשר לוודא $\mathbb{Z}_{<p>}/M\cong\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ שדה.

M מקסימלי יחיד – באופן דומה. $\square$

משפט:

נסתכל על התאמות בין אידאלים:

$$\{J\lhd S^{-1}R\}\longleftrightarrow\{I\lhd R\mid I\cap S=\emptyset\}$$

$$\left\{\frac{a}{b}\ \middle|\ a\in I,\ b\in S\right\}=S^{-1}I \longleftarrow\!\shortmid\ I$$

$$J\longmapsto J\cap \underset{(i(R))}{R}$$

אז:

א. ההתאמה $I\mapsto S^{-1}I$ היא על.

ב. ההתאמה $J\mapsto J\cap R$ היא חח"ע.

ג. ההתאמות נכונות גם אם מצמצמים לאידאלים ראשוניים.

הערה:

$R=\mathbb{Z}$, $S=\{2^k\mid k\geq 0\}$, $I=6\mathbb{Z}$. I לא ראשוני, אבל $S^{-1}(I)=S^{-1}(6\mathbb{Z})=S^{-1}(3\mathbb{Z})$ כן ראשוני.

הגדרה:

יהי R חוג חילופי, ויהי $P\triangleleft R$ ראשוני. אז $S=R\setminus P$ סגורה לכפל, ומסמנים $R_P=(R\setminus P)^{-1}R$.

דוגמאות:

א. $R=\mathbb{Z}$, $P=\langle p\rangle=p\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_{\langle p\rangle}\cong\left\{\frac{a}{b}\in\mathbb{Q} \mid p\nmid b\right\}$.

ב. יהי R_0 תחום שלמות. $R=R_0[x]$, $P=\langle x-a\rangle$ $(a\in R_0)$ אידאל ראשוני, ונקבל את החוג

$$S^{-1}R=R_0[x]_{\langle x-a\rangle}=\left\{\frac{f(x)}{g(x)} \,\middle|\, \underset{g(a)\neq 0}{(x-a)\nmid g(x)}\right\}$$

טענה:

R_P חוג מקומי עם אידאל מקסימלי יחיד PR_P.

תרגיל:

יהי R חוג חילופי, ויהיו $I,J\triangleleft R$. נסמן I_P,J_P מתוך האידאלים המתאימים במיקום ב-P (כש-P אידאל ראשוני). הוכיחו: אם לכל אידאל ראשוני P מתקיים $I_P=J_P$, אז $I=J$.

הוכחה:

נניח בשלילה $I\neq J$, מה"כ $I\not\subseteq J$. לכן קיים $x\in I\setminus J$. נגדיר

$$(J:x)=\{r\in R \mid rx\in J\}.$$

$(J:x)$ אידאל (תרגיל), ו-$(J:x)$ אמיתי אם J אמיתי. (כי $1\notin(J:x)$).

יהי M האידאל המקסימלי המכיל את $(J:x)$.

לפי ההנחה, $I_M=J_M$, לכן $\frac{x}{1}\in J_M$. לכן $\frac{x}{1}=\frac{j}{r}$

עבור $r\in R\setminus M$, $j\in J$. לכן $rx=xr=j\in J \Leftarrow r\in(J:x)\subseteq M$ - בסתירה.

לכן $I=J$.

$\square$

תחומי שלמות

תמ"ש = תחום שלמות

תחומים אוקלידיים

הגדרה:
יהי R תמ"ש. נאמר ש-a מחלק את b, ונסמן $a|b$, אם קיים $r\in R$ כך ש-$b=ar$.

דוגמה:
ב-$\mathbb{Z}$, $2|4$, $3\nmid 4$.
ב-$\mathbb{Q}$, $3|4$.

דוגמה:
יהי F שדה. נתבונן בתת-החוג $S\subseteq F[x]$ - {פולינומים שהמקדם של x הוא 0}.
ב-S, $x^2\nmid x^3$.
ב-$F[x]$, $x^2|x^3$.

הערה:
$a|b \iff bR\subseteq aR$.

הגדרה:
תחום אוקלידי (Euclidean domain) הוא תמ"ש עם פונקציה $d:R\to\mathbb{N}\cup\{0,-\infty\}$ המקיימת $d(0)<d(x)$ לכל $x\neq 0$ וגם:
א. לכל $a\in R$ ו-$b\neq 0$ קיימים $q,r\in R$ כך ש-$a=qb+r$, $d(r)<d(b)$.
ב. אם $a|b$ אז $d(a)\leq d(b)$.

d נקראת פונקציה אוקלידית.

דוגמאות:
א. F שדה עם $d(x)=1$ לכל $x\neq 0$.
ב. $\mathbb{Z}$ הוא תחום אוקלידי עם $d(n)=|n|$.
ג. $\mathbb{Z}[i]$ הוא תחום אוקלידי עם $d(a+bi)=a^2+b^2$.

3. $F[x]$ תחום אוקלידי, $d(f)=\deg f$, $d(0)=-\infty$.

משפט:

יהי R חוג חילופי ויהיו $f(x),g(x)\in R[x]$ כך ש- $g(x)$ מתוקן. אז קיימים $q(x),r(x)\in R[x]$ כך ש- $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$, $\deg r<\deg g$.

משפט:

תחום אוקלידי $\Leftarrow$ תחום ראשי.

רעיון ההוכחה:

יהי $0\neq I\lhd R$, R תחום אוקלידי. יהי $0\neq b\in I$ מינורה מינימלית. טענה: $I=\langle b\rangle$

אכן, $\langle b\rangle\subseteq I$ (כי $b\in I$).

מצד שני, נניח בשלילה שקיים $a\in I\setminus\langle b\rangle$. נכתוב $a=qb+r$, $d(r)<d(b)$.
$r\neq 0$

ואז $r=a-qb\in I$ מינורה קטנה יותר משל b. סתירה. $\square$

תרגיל:

$\mathbb{Z}[x]$ לא תחום אוקלידי.

הוכחה:

$\langle 2,x\rangle$ אידאל לא ראשי ב- $\mathbb{Z}[x]$ $\Leftarrow$ $\mathbb{Z}[x]$ לא תחום ראשי $\Leftarrow$ לא תחום אוקלידי.

תרגיל:

יהי $a\in R$ איבר בתחום אוקלידי. הוכיחו כי a הפיך ב- R $\Longleftrightarrow$ $d(a)=d(1)$.

פתרון:

$\boxed{\Leftarrow}$ a הפיך, לכן $a|1$ $\Leftarrow$ $d(a)\leq d(1)$.

מצד שני, $1|a$ $\Leftarrow$ $d(1)\leq d(a)$.

$\boxed{\Rightarrow}$ אם $d(a)=d(1)$, נכתוב $1=qa+r$, $d(r)<d(a)=d(1)$.

אם $r\neq 0$ נקבל סתירה כי $1|r$ $\Leftarrow$ $d(1)\leq d(r)$. לכן $1=qa$

$\Leftarrow$ a הפיך. $\square$

תרגיל:

יהי F שדה. אז $F[[x]]$ הוא תחום אוקלידי.

הוכחה:

ניקח $(d(0)=-\infty)$ $d\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \min\{n \mid a_n \neq 0\}$.

קל לראות שאם $0\neq f(x),g(x)\in F[[x]]$, $d(fg)=d(f)+d(g)\geq d(f)$.

לכן דרישה 2 מתקיימת.

נניח $g\neq 0$, וצ״ל שקיימים $q,r\in F[[x]]$ כך ש- $f=qg+r$, $d(r)<d(g)$.

אם $d(f)<d(g)$ נבחר $q=0$, $r=f$.

אחרת $m=d(f)\geq d(g)=n$. נכתוב $f=x^m f_0$, $g=x^n g_0$, ואז f_0,g_0 הפיכים

ו- $d(f_0)=d(g_0)=0$. נבחר $q=x^{m-n}g_0^{-1}f_0$, $r=0$. אז

$$qg+r = x^{m-n}g_0^{-1}f_0x^ng_0 = x^mf_0=f$$

$\Leftarrow$ d פונקציה אוקלידית.