תרגיל 1

9 באוגוסט 2017

1. הוכיחו או הפריכו:
   א. $(A \to B) \to (B \to A) \equiv A \vee \neg B$.
   ב. הפסוק $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \leftrightarrow \neg p)$ הוא טאוטולוגיה.
   ג. הפסוקים $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ ו־ $p \wedge (q \vee r)$ שקולים.

פיתרון:

א. הוכחה:

A	B	$A \to B$	$B \to A$	צד שמאל	$A \vee \neg B$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

ב. הוכחה: ראינו ש־ $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$, ובאותו אופן $q \to p \equiv \neg p \to \neg q$. ולכן נקבל:

$$p \leftrightarrow q \stackrel{*}{=} (p \to q) \wedge (q \to p) = (\neg q \to \neg p) \wedge (\neg p \to \neg q) \stackrel{**}{=} (\neg p \to \neg q) \wedge (\neg q \to \neg p) \stackrel{*}{=} (\neg q \leftrightarrow \neg p)$$

כאשר השיוויון $*$ נובע מהגדרת "אם ורק אם", והשיוויון $**$ נובע מחילופיות הקשר "וגם".

ג. הפרכה: אם $p = T, q = r = F$ אז הביטוי הימני נותן F, ואילו הביטוי השמאלי נותן T.

2. בחרו נכון או לא נכון ונמקו:
   א. כאשר השמש זורחת כל התרנגולים קוראים.
   ב. כאשר התרנגול שלי, קוקי, קורא, השמש זורחת.
   מסקנה: השמש זורחת $\iff$ כל התרנגולים קוראים.

פיתרון:

אכן כן: $\Leftarrow$: נניח שהשמש זורחת, אז לפי א כל התרנגולים קוראים.

$\Rightarrow$: נניח שכל התרנגולים קוראים. לכן, בפרט קוקי קורא. לכן לפי ב השמש זורחת.

3. איזה מבין הבאים שקול לשלילת המשפט: לכל טבח קיים מאכל שהוא מכין טעים.
   א. לכל טבח לא קיים מאכל שהוא מכין טעים.

ב. קיים טבח שלא קיים מאכל שהוא מכין טעים.

ג. לא קיים טבח.

ד. קיים טבח כך שקיים מאכל שהוא מכין טעים.

ה. קיים טבח שקיים מאכל שהוא מכין לא טעים.

ו. קיים טבח שכל מאכל הוא מכין לא טעים.

ז. קיים טבח שכל מאכל הוא מכין טעים.

ח. לא לכל טבח קיים מאכל שהוא מכין טעים.

ט. לכל מאכל קיים טבח שהוא מכין אותו לא טעים.

פיתרון:

ב, ו, ח.

4. א. מעל הממשיים, מצאו פרדיקט Q עבורו הפסוק

$$\forall x \exists y Q(x,y) \wedge \forall y \exists x Q(x,y) \to \forall x \exists y (Q(x,y) \wedge Q(y,x))$$

לא בהכרח נכון.

ב. פרדיקט P מעל השלמים ייקרא "נחמד" אם הפסוק

$$\exists a \in \mathbb{Z} : [P(a) \to P(a+1)]$$

בעל ערך $TRUE$. הוכיחו או הפריכו: כל פרדיקט הוא נחמד.

ג. כיתבו פסוק שקול לפסוק הבא ללא שימוש בקשר השלילה:

$$\neg(\exists x \in \mathbb{Q}.\ \forall y \in \mathbb{Q}.\ ((y^2 < 2 \to x > y) \wedge (\forall \varepsilon > 0.\ \exists z \in \mathbb{Q}.\ (z^2 < 2 \wedge z > x - \varepsilon))))$$

מותר להשתמש בסימנים המופיעים בפסוק המקורי בלבד (למעט בקשר השלילה כמובן) ובנוסף בפרדיקט $\leq$.

פיתרון:

א. למשל הפרדיקט $Q(x,y) = x < y$ על הממשיים: צד שמאל תמיד נכון, לכל x נבחר את $y = x+1$, ולכל y את $x = y-1$. צד ימין לא נכון עבור x, y כלשהם.

ב. הוכחה: יהי P פרדיקט. אם קיים $a \in \mathbb{Z}$ כך ש־$P(a) = F$ אז, לפי הגדרת הקשר גרירה, נקבל שאכן $P(a) \to P(a+1) = T$ וסיימנו. אחרת, לכל $a \in \mathbb{Z}$ מתקיים $P(a) = T$, ולכן לכל a מתקיים $P(a) \to P(a+1) = T$.

ג. פתרון:

$$\forall x \in \mathbb{Q}.\ \exists y \in \mathbb{Q}.\ (y^2 < 2 \wedge x \leq y) \vee (\exists \varepsilon > 0.\ \forall z \in \mathbb{Q}.\ (2 \leq z^2 \vee z \leq x - \varepsilon))$$

5. נתונות הקבוצות הבאות:

$$\begin{array}{lllllllll} X_3 & = & \{a, \{\{a\}\}\} & X_2 & = & \{a, \{a\}\} & X_1 & = & \{\{a\}\} \\ X_6 & = & \{a, \{a\}, \{\{a\}\}, \{a, \{a\}\}\} & X_5 & = & \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\} & X_4 & = & \{\{a\}, \{\{a\}\}\} \end{array}$$

אילון מהטענות הבאות נכונות:

א. $X_1 \in X_2$

ב. $X_1 \subseteq X_2$

ג. $X_2 \in X_6$

ד. $X_2 \subseteq X_3$

ה. $X_3 \subseteq X_4$

ו. $X_4 \subseteq X_5$

ז. $X_5 \in X_6$

ח. $X_5 \subseteq X_6$

פיתרון:

ב, ג, ו, ח

6. בכל סעיף מצאו קבוצות A, B, C המקיימות את תנאי הסעיף:

א. $A \cup B \subseteq A \cup C$ אבל $B \nsubseteq C$.

ב. $A \cap B \subseteq A \cap C$ אבל $B \nsubseteq C$.

ג. $A \in B, B \in C, A \notin C$.

ד. $A \in B, B \in C, A \in C$

ה. $A \in B, A \subseteq B$

פיתרון:

א. $A = \{1,2\}, B = \{2,3\}, C = \{3\}$

ב. $A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{3\}$

ג. $A = \{1\}, B = \{\{1\}\}, C = \{\{\{1\}\}\}$

ד. $A = \{1\}, B = \{\{1\}\}, C = \{\{\{1\}\}, \{1\}\}$

ה. $A = \{1\}, B = \{\{1\}, 1\}$

7. הוכיחו או הפריכו:

א. לכל שתי קבוצות X, Y אם $X \subseteq Y$ אז $X \cup (Y \setminus X) = Y$.

ב. $(A \triangle B) \triangle (A \cap B) = A \cup B$.

ג. $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$.

ד. $\{2n + 5 | n \in \mathbb{Z}\} = \{2n + 9 | n \in \mathbb{Z}\}$

פיתרון:

א. הוכחה: נראה הכלה דו כיוונית:

$\supseteq$: יהי $y \in Y$, אזי אם $y \in X$ אז $y \in X \cup (Y \setminus X)$, אחרת $y \in Y \setminus X$ ולכן $y \in X \cup (Y \setminus X)$.

$\subseteq$: יהי $y \in X \cup (Y \setminus X)$ אזי מתקיים: $y \in X \vee y \in Y \setminus X$. אם $y \in X$ אז מהעובדה ש־$X \subseteq Y$ נובע $y \in Y$. אם $y \in Y \setminus X$ גם נובע ישירות ש־$y \in Y$. ובסה"כ בכל מקרה $y \in Y$.

ב. הוכחה. טענת עזר: אם $X \cap Y = \phi$ אז $X \triangle Y = X \cup Y$.

הוכחת טענת העזר: $X \triangle Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y) = (X \cup Y) \setminus \phi = X \cup Y$.

כעת אצלנו נשים לב ש- $(A \triangle B) \cap (A \cap B) = \phi$ ולכן $(A \triangle B) \triangle (A \cap B) = (A \triangle B) \cup (A \cap B) = [(A \cup B) \setminus (A \cap B)] \cup (A \cap B) = A \cup B$.

הסבר המעברים: השיוויון הראשון זה בדיוק טענת העזר. השיוויון השני זו שקילות של ההפרש הסימטרי. והשיוויון השלישי נובע מכך ש- $(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$ ובעזרת סעיף א.

ג. הפרכה: $A = \{1,2\}, B = \{1,3\}, C = \{1,4\}$, אזי $(A \setminus B) \setminus C = \{2\} \setminus \{1,4\} = \{2\}$, אבל $A \setminus (B \setminus C) = \{1,2\} \setminus \{3\} = \{1,2\} \neq \{2\}$.

ד. הוכחה: נשתמש בהכלה דו־כיוונית.

לכיוון אחד, יהי $x \in \{2n+5 | n \in \mathbb{Z}\}$ כלומר קיים $n \in \mathbb{Z}$ עבורו: $x = 2n+5$.

לכן: $x = 2(n-2)+9$. מכיוון ש- $n \in \mathbb{Z}$ אז גם $n-2 \in \mathbb{Z}$ ולכן לפי הגדרת $\{2n+9 | n \in \mathbb{Z}\}$ נקבל שאכן $x \in \{2n+9 | n \in \mathbb{Z}\}$, כלומר:

$$\{2n+9 | n \in \mathbb{Z}\} \supseteq \{2n+5 | n \in \mathbb{Z}\}$$

לכיוון השני, יהי $x \in \{2n+9 | n \in \mathbb{Z}\}$ כלומר קיים $n \in \mathbb{Z}$ עבורו $x = 2n+9$.

לכן: $x = 2(n+2)+5$. מכיוון ש- $n \in \mathbb{Z}$ אז גם $n+2 \in \mathbb{Z}$ ולכן לפי הגדרת $\{2n+5 | n \in \mathbb{Z}\}$ נקבל שאכן $x \in \{2n+5 | n \in \mathbb{Z}\}$, כלומר:

$$\{2n+9 | n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \{2n+5 | n \in \mathbb{Z}\}$$

ולכן סה"כ לפי הכלה דו־כיוונית נקבל:

$$\{2n+5 | n \in \mathbb{Z}\} = \{2n+9 | n \in \mathbb{Z}\}$$

8. לכל $n \in \mathbb{N}$ נגדיר:

$$A_n = \begin{cases} [0, \frac{n}{2}] & n \text{ is even} \\ [-\frac{n-1}{2}, 0] & n \text{ is odd} \end{cases}$$

כאשר $[a,b]$ הוא הקטע הסגור בממשיים. עוד נגדיר $B_n = \mathbb{R} \setminus A_n$.

א. מצא את $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$. הוכח תשובתך.
ב. מצא את $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$. הוכח תשובתך.
ג. מצא את $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} B_n$. הוכח תשובתך.
ד. מצא את $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} B_n$. הוכח תשובתך.

פיתרון:

א. נקבל $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n = \mathbb{R}$. נוכיח ע"י הכלה דו־כיוונית:

$\supseteq$: יהי $x \in \mathbb{R}$, אם $x \geq 0$ אזי $x \in [0, \lfloor x \rfloor + 1]$ ולכן $x \in A_{2(\lfloor x \rfloor + 1)}$, ולכן הוא נמצא באיחוד הכללי, המוגדר כאוסף האיברים שנמצאים לפחות באחת הקבוצות, והנה מצאנו אחת כזו. באותו אופן אם $x < 0$ אז $x \in [\lfloor x \rfloor, 0]$ ולכן $x \in A_{2\cdot\lfloor x \rfloor + 1}$.

$\subseteq$:ברור כי כל האיברים כאן הם מהממשיים.

ב. נקבל $\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} A_n = \{0\}$. נוכיח: ההכלה $\supseteq$ ברורה, כי 0 נמצא בכל אחת מהקבוצות, ולכן בחיתוך של כולם לפי הגדרה. נניח בשלילה שקיים $\mathbb{R} \ni x \neq 0$ כך ש $x \in \underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} A_n$, אזי לפי הגדרה לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $x \in A_n$. לכן בפרט $x \in A_3 = [-1, 0]$ אבל $x \neq 0$ ולכן נובע ש־$x < 0$. בנוסף נובע בפרט ש־ $x \in A_2 = [0, 1]$, אבל $x \neq 0$ ולכן נובע ש־$x > 0$ בסתירה לכך שראינו ש־$x < 0$.

ג. נשתמש בדה־מורגן המוכלל ובסעיפים הקודמים, עבור $U = \mathbb{R}$:

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} B_n = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n^c = \left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} A_n\right)^c = (\{0\})^c = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$$

ד. באותו אופן:

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} B_n = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cap} A_n^c = \left(\underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} A_n\right)^c = \mathbb{R}^c = U^c = \phi$$

בהצלחה!