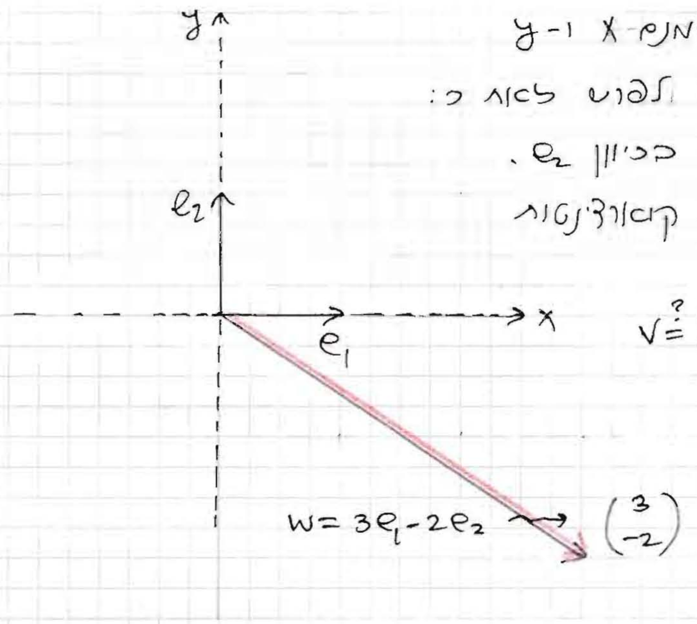
שינוי בסיס והחלפת קואורדינטות

מרחב ווקטורי 2-מימדי ניתן למידול גיאומטרי כ"חיצים" במישור
בחירת בסיס אורתונורמלי שקולה לבחירת מערכת צירים קרטזית.
באופן הבא-
כל ווקטור ניתן להצגה כקומבינציה לינארית של הבסיס $V=a\cdot e_1+b\cdot e_2$
אם נעזר במודל הגיאומטרי נצייר את e_1 ו-e_2 מאונכים זה לזה.
כ"הרגלנו" נעזר בשני צירים שנסמנם x ו-y
כאשר ידוע ש $V=a\cdot e_1+b e_2$ ניתן לפרש זאת כ:
a "צעדים" בכיוון e_1 ו-b "צעדים" בכיוון e_2.
נאמר שהמקדמים a ו-b מגדירים קואורדינטות של הווקטור V.
ואז מייצגים את V "בפשטות" כ- $V\overset{?}{=}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$



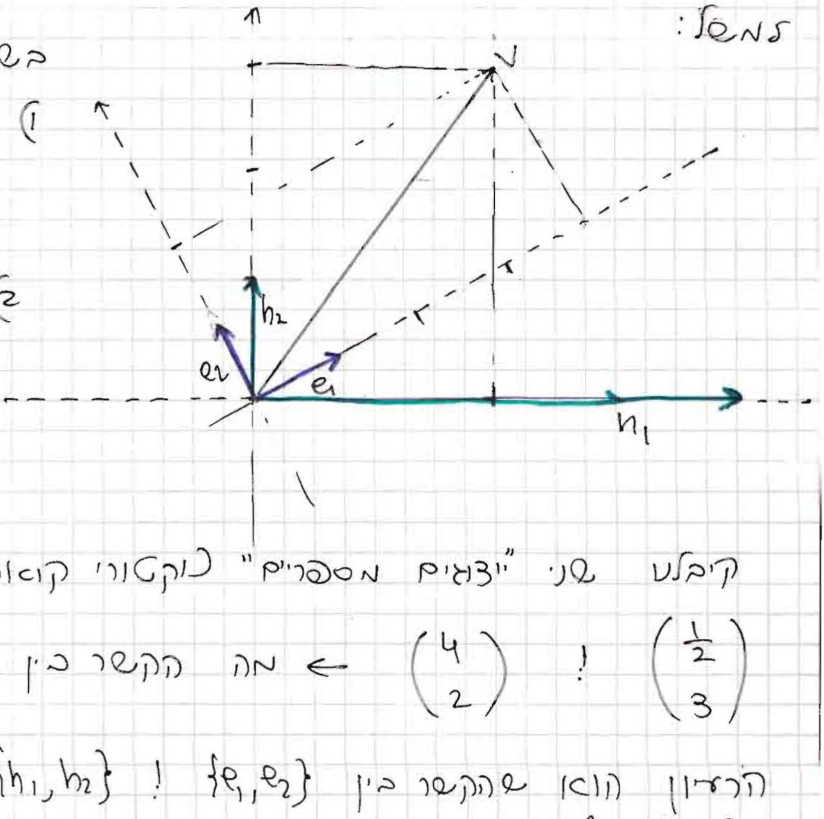
* חשוב להבין-
לווקטור V קיימת הצגה כזו <u>רק אם</u> <u>נבחר בסיס</u>

<u>אם לא נבחר בסיס</u> - V הוא רק "חץ" במישור (ללא קיטלוג מספרי)
ובנוסף <u>אם נבחר בסיס אחר</u> ("מערכת קואורדינטות אחרת") הייצוג המספרי $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ של החץ V יהיה <u>שונה</u>!

המטרה שלנו להבין כיצד ניתן לדעת מהו ייצוג החץ בקואורדינטות שונות.
למשל:

בשביל "לבנות" את החץ הנתון V אפשר לעשות
1) $\frac{1}{2}$ צעד בכיוון h_1 ו-3 צעדים בכיוון h_2
↓
$V=\frac{1}{2}h_1+3h_2$

2) 4 צעדים בכיוון e_1 ו-2 צעדים בכיוון e_2
↓
$V=4e_1+2e_2$



קיבלנו שני "ייצוגים מספריים" (וקטורי קואורדינטות) עבור אותו החץ V

$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\3\end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ ← מה הקשר בין שני זוגות המספרים הללו?

הרעיון הוא שהקשר בין $\{e_1,e_2\}$ ו $\{h_1,h_2\}$ מגדיר את הקשר בין 2 הצגות השונות של כל חץ במישור.

לדעת את ה"קשר" בין $\{h_1,h_2\}$ ו $\{e_1,e_2\}$ משמעו לדעת את ההצגה של אחד הבסיסים כקומבינציה לינארית של השני. למשל

אם ידועים
$$\begin{cases} h_1 = a_{11}\cdot e_1 + a_{12}e_2 \\ h_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 \end{cases}$$

הסימון של המקדמים ע"י a_{ij} מסייע את העובדה שאת המידע הזה נוח ל"אחסן" בכתיב מטריצי.

כלומר -
$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

למטריצה הזו $T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

אנחנו נקרא <u>מטריצת מעבר</u> בין בסיסים $\{h_1,h_2\} \leftarrow \{e_1,e_2\}$

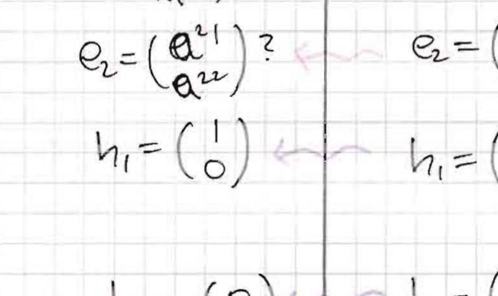
* בפועל $h_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix}$ ו $h_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ הן בדיוק הקואורדינטות של h_1 ו- h_2 במערכת הצירים המוגדרת ע"י $\{e_1,e_2\}$

לכל וקטור v נסמן את "ייצוגו" בקואורדינטות בבסיס $\{e_1,e_2\}$ ע"י X ואת "ייצוגו" בקואורדינטות בבסיס $\{h_1,h_2\}$ ע"י X' ← נסכם מה שידוע לנו עד כה בטבלה:

ייצוג X	ייצוג X'
$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$e_1 = \begin{pmatrix} a^{11} \\ a^{12} \end{pmatrix}$?
$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$e_2 = \begin{pmatrix} a^{21} \\ a^{22} \end{pmatrix}$?
$h_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix}$	$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$h_2 = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}$	$h_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

? כיצד נבטא את e_1 ו- e_2 כקומבינציה של h_1 ו- h_2?
$$T^{-1}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a^{11} & a^{12} \\ a^{21} & a^{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

הטבלה הזו מראה כיצד משתנות הקואורדינטות של וקטורי הבסיס $\{e_1,e_2\}$ ו $\{h_1,h_2\}$.
בגלל שאנחנו מתעסקים בהחלפת קואורדינטות לינאריות — זה מספיק בשביל לקבוע כל מעבר בין קואורדינטות של כל חץ v.



לנוסחאות המעבר תהיה התבנית הבאה:

$$\begin{pmatrix} ? \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \end{pmatrix}$$

X': קואורדינטות של החץ v בבסיס $\{h_1,h_2\}$

X: קואורדינטות של החץ בבסיס $\{e_1,e_2\}$

כדי להחליט איזו מטריצה מופיעה בנוסחאות יש להתבונן במספרים בטבלה ולראות איזו מטריצה תתאים להם.

$$\overset{h_1'}{\begin{pmatrix} \bigcirc & ? \end{pmatrix}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\overset{h_1}{\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{12}\end{pmatrix}} \qquad \overset{h_2'}{\begin{pmatrix} ? & \bigcirc \end{pmatrix}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{21}\\a_{22}\end{pmatrix}$$

$$\bigcirc=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{12}\end{pmatrix} \qquad \bigcirc=\begin{pmatrix}a_{21}\\a_{22}\end{pmatrix}$$

← המטריצה היא $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21}\\ a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}$ ← שזו... U^T

ולכן הקשר הוא: $U^Tx'=x$

איך נקבל את קשר המעבר השני?

1) מהקשר הראשון $U^Tx'=x \Leftarrow x'=(U^T)^{-1}x$

2) משיקול דומה לקבלת הקשר הקודם:

$$\overset{e_1'}{\begin{pmatrix}a^{11}\\a^{12}\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix} \bigcirc & ? \end{pmatrix}\overset{e_1}{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}} \qquad \overset{e_2'}{\begin{pmatrix}a^{21}\\a^{22}\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix} ? & \bigcirc \end{pmatrix}\overset{e_2}{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix}a^{11}\\a^{12}\end{pmatrix}=\bigcirc \qquad \begin{pmatrix}a^{21}\\a^{22}\end{pmatrix}=\bigcirc$$

$$x'=\begin{pmatrix}a^{11} & a^{21}\\ a^{12} & a^{22}\end{pmatrix}x \Leftarrow \begin{pmatrix}a^{11} & a^{21}\\ a^{12} & a^{22}\end{pmatrix} \Leftarrow$$

$$x'=\begin{pmatrix}a^{11} & a^{12}\\ a^{21} & a^{22}\end{pmatrix}^T x$$

$$x'=(U^{-1})^T x=(U^T)^{-1}x$$

בסה"כ

$$\boxed{\begin{matrix}U^Tx'=x\\ x'=(U^T)^{-1}x\end{matrix}} \qquad \boxed{\begin{matrix}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}=U\begin{pmatrix}e_1\\e_2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}e_1\\e_2\end{pmatrix}=U^{-1}\begin{pmatrix}h_1\\h_2\end{pmatrix}\end{matrix}}$$

נוסחאות מעבר בין קואורדינטות ⟷ נוסחאות מעבר בין בסיסים

מגדירות...

* בהרצאה טיפלנו רק במקרה בו $\{h_1,h_2\}$ בסיס ~~[illegible]~~ אורתונורמלי ← $|h_2|=|h_1|=1$, $h_1\cdot h_2=0$

← U מטריצה אורתוגונלית ← מתקיים $U^T=U^{-1}$

ואז נוסחאות המעבר פשוטות יותר:

$$\boxed{\begin{matrix}U^Tx'=x\\ x'=Ux\end{matrix}} \qquad \boxed{\begin{matrix}h=Ue\\ e=U^Th\end{matrix}}$$

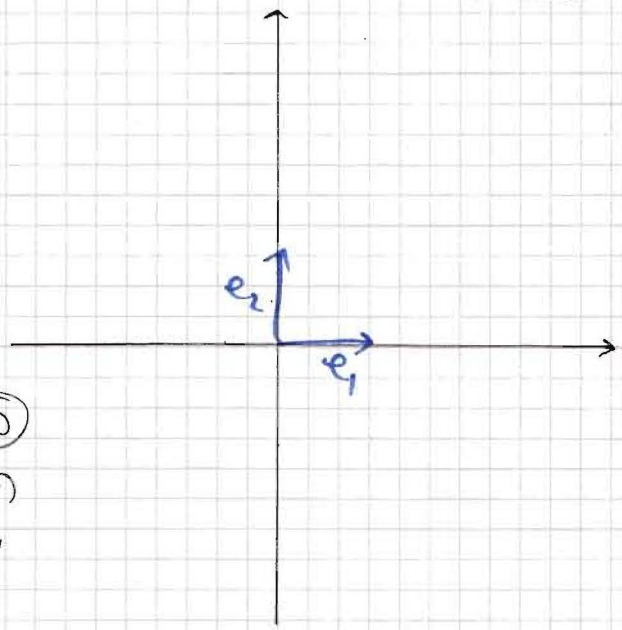
דוגמא –

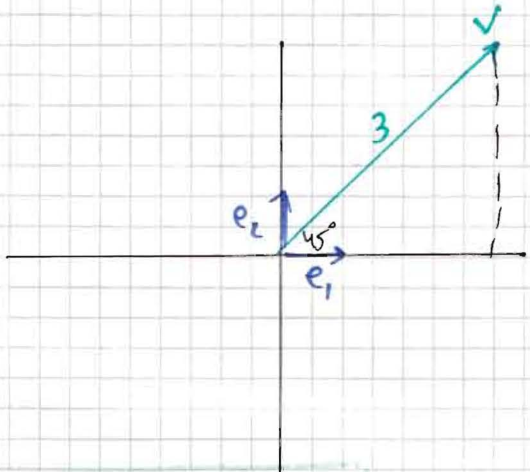
נתונה מערכת צירים אורתוגונלית עם בסיס אורתונורמלי $\{e_1, e_2\}$

וקטור V יוצר זווית של 45° עם שני וקטורי הבסיס ואורכו 3.

א. מצאו הצגתו של V באמצעות קואורדינטות במערכת הצירים הנתונה.

ב. בסיס חדש מתקבל מסיבוב מערכת הצירים הנתונה ב 45° מעלות עם כיוון השעון. מהי הצגתו של V במערכת הצירים החדשה?





שלב 1 – נצייר את V ע"פ התיאור:

כדי להציג את V כקומבינציה לינארית של e_1 ו e_2 נחשב את אורך ההיטלים של V על כל אחד מהצירים

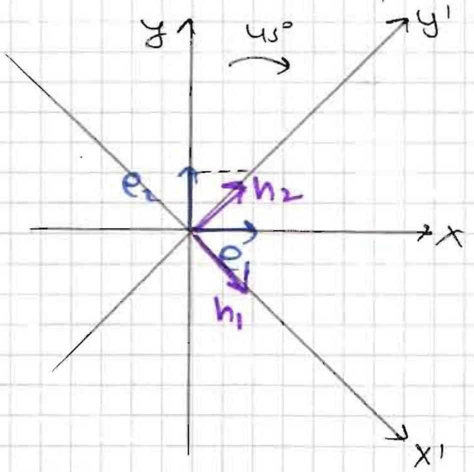
(שיקולים גיאומטריים – טריגונומטריים)

$$y = \frac{3}{\sqrt{2}} \Leftarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 45^\circ = \frac{y}{3}$$

$$\text{(א)} \quad \boxed{V = \frac{3}{\sqrt{2}} e_1 + \frac{3}{\sqrt{2}} e_2} \Leftarrow x = y = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

שלב 1

ב. נצייר את מערכת הצירים החדשה ביחס למערכת הצירים המקורית ונסמן בשרטוט זה את הבסיס החדש.



שלב 2 נחשב את ההצגה של h_1 ו- h_2

בבסיס e_1 ו- e_2

ניעזר בשיקולים גיאומטריים – h_1 ו h_2 באורך 1

ויוצרים זווית 45° עם הוקטורים המקוריים...

$h_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} e_2 \leftarrow$ ההיטלים לצירים באורך $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} e_2$

בסימון "מטריצי"

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{U} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

המעבר בין ייצוג הקואורדינטות נתון ע"י

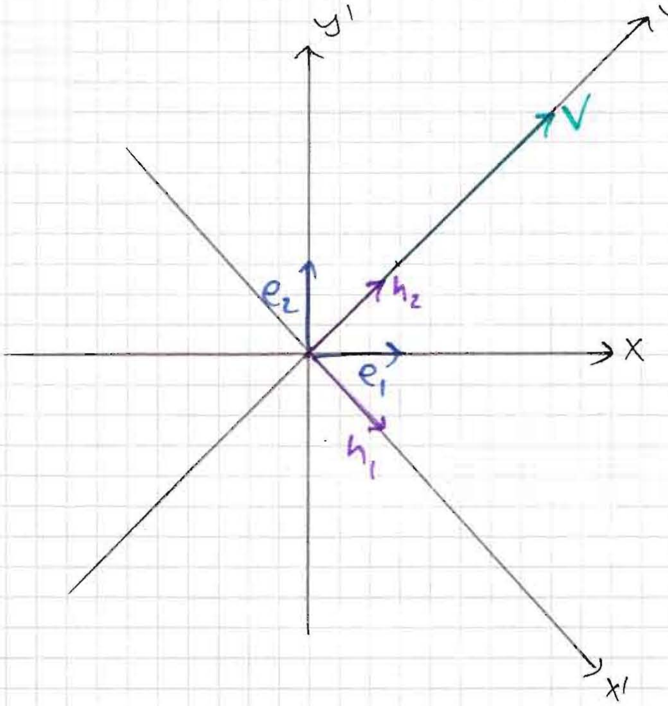
$$\underset{h_1'}{\begin{pmatrix} & ? & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}} = \overset{h_1}{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ -\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}}$$

$$\underset{h_2'}{\begin{pmatrix} & ? & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}} = \underset{h_2}{\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\\ -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}X' = X$$

כפל במטריצה ההופכית.

$$X' = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}X$$



שלב 3 - נוסיף את הוקטור V לשרטוט.

באופן אינטואיטיבי - (חשוב!)

V נמצא על ציר y' ולכן נצפה שתהיה לו קואורדינטה x' שווה 0.

מעבר לכך V נמצא בכיוון החיובי של ציר y' ואורכו 3.
ולכן מתקבל ע"י 3 צעדים בכיוון h_2

$\Downarrow$

בקואורדינטות X' $\quad V' = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$

נוודא זאת באמצעות ה"נוסחאות":

$$\overset{V'}{\begin{pmatrix}?\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\overset{V}{\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt2}\\ \frac{3}{\sqrt2}\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}\frac32 - \frac32\\ \frac32 + \frac32\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix} \checkmark$$

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\\ -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\underset{V'}{\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}} = \underset{V}{\begin{pmatrix}\frac{3}{\sqrt2}\\ \frac{3}{\sqrt2}\end{pmatrix}} \checkmark$$