

תרגיל בית 10 – טופולוגיה

שאלה 1

א. הוכיחו שכל מרחב טופולוגי דיסקרטי הוא קומפקטי אמ"מ הוא סופי.
ב. יהי X מ"ט קומפקטי. יהי $\{K_i\}_{i \in I}$ אוסף קבוצות סגורות, כך שכל חיתוך

סופי של קבוצות מאוסף זה אינו ריק. הוכיחו ש- $\bigcap_{i \in I} K_i \neq \emptyset$.

שאלה 2

א. יהי (X, τ) מרחב טופולוגי. יהיו A_1, \dots, A_n תתי מרחבים קומפקטיים של

X . הוכיחו ש- $\bigcup_{i=1}^n A_i$ הוא קומפקטי.

ב. מצאו דוגמה נגדית כאשר מדובר באינסוף תתי מרחבים קומפקטיים.
ג. יהי X מ"ט האוסדורף. יהי $\{F_i\}_{i \in I}$ אוסף כלשהו של קבוצות קומפקטיות.

הוכיחו כי $\bigcap_{i \in I} F_i$ קומפקטי.

שאלה 3

תהי $f: X \rightarrow Y$ חח"ע ועל.

א. הוכיחו שאם f פתוחה או סגורה ואם X הוא האוסדורף אזי Y הוא האוסדורף.

ב. הוכיחו שאם f רציפה ו- Y האוסדורף, אזי X האוסדורף.

שאלה 4

יהי (X, τ) מרחב טופולוגי האוסדורף. יהי $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ אוסף של תתי מרחבים

קומפקטיים לא ריקים כך שמתקיים $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \dots$. הוכיחו ש- $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i \neq \emptyset$.

תנו דוגמה נגדית למקרה שתתי המרחבים אינם קומפקטיים.

שאלה 5

א. יהי (X, τ) מרחב טופולוגי אינסופי המקיים את התכונה הבאה: כל תת

מרחב הוא קומפקטי. הוכיחו ש- (X, τ) אינו האוסדורף.

- ב. יהי (X, τ) מרחב טופולוגי שאינו בן מניה ואינו קומפקטי. הוכיחו שקיימים ב- X מספר לא בן מניה של תתי מרחבים קומפקטיים ומספר לא בן מניה של תתי מרחבים לא קומפקטיים.
- ג. יהי (X, τ) מרחב טופולוגי, כך שכל תת מרחב סגור לא טריוויאלי הוא קומפקטי. הוכיחו ש- (X, τ) קומפקטי.

בהצלחה!