

תרגיל 11 – מבוא לאנליזה 1

1. הוכיחו שלמשוואה $2x = \cos x$ יש פתרון ממשי יחיד.
2. הפונקציה $f(x)$ גזירה פעמיים בקטע $[-2, 2]$ ומקיימת $f(-2) = f(0) = f(2)$. הוכיחו שקיימת נקודה $x_0 \in (-2, 2)$ שבה $f''(x_0) = 0$.
3. הוכיחו שעבור $0 < a < b$ מתקיים $\frac{b-a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a}$.
4. הפונקציה $f(x)$ גזירה בכל נקודה, $f'(x) \leq 7$ לכל x , $f(1) = 20$ ו- $f(9) = 68$. השתמשו במשפט הערך הממוצע של לגרנז' (פעמיים) כדי להוכיח $54 \leq f(7) \leq 62$.
5. בעזרת משפט הערך הממוצע של קושי, הוכיחו כי לכל $x, y \in [0, \frac{\pi}{3}]$ מתקיים $|\tan(x) - \tan(y)| \leq 8 \cdot |\sin(x) - \sin(y)|$.