

אנליזה מודרנית

תרגיל 9

תאריך הגשה: 10.1.12

תרגיל 1 יהיו הממ"חים $(X, \mathcal{S}, \mu) = (Y, \mathcal{T}, \nu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#)$ כאשר $\#$ היא מידת הספירה. נגדיר את הפונקציה $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ ע"י

$$f(m, n) = \begin{cases} 2 - 2^{-m} & m = n \\ -2 + 2^{-m} & m = n + 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

1. מהו מלבן מדיד במרחב במכפלה $X \times Y$?

2. הוכיחו כי f מדידה במרחב המכפלה.

3. הוכיחו כי מתקיים

$$\int_{\mathbb{N}} \left[\int_{\mathbb{N}} f(m, n) d\#(m) \right] d\#(n) \neq \int_{\mathbb{N}} \left[\int_{\mathbb{N}} f(m, n) d\#(n) \right] d\#(m)$$

4. הסבירו מדוע סעיף 3 לא סותר את משפט פוביני וטונלי.

תרגיל 2 (שאלה פס' 3 במבחן שנת תשע"א)

1. אפיינו קבוצות מדידות ביחס למידת המכפלה $u \times v$.

2. צטטו את משפט טונלי.

3. נניח ש- (X, \mathcal{S}, u) ו- (Y, \mathcal{T}, v) הם שני מרחבי מידה חיובית, כאשר u ו- v שלימות ו- σ -סופיות. כרגיל נגדיר את מידת המכפלה $w = u \times v$. תהי $E \subseteq X \times Y$ מדידה dw , ותהי $w(E) = 0$. הוכיחו שלכמעט כל $x \in X$ הקבוצה $v(E_x) = 0$ מקיימת $E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}$.

יש לפתור רק את סעיף ג'

תרגיל 3 (בונוס בשווי 15 נקודות) השתמשו בזהות $\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xy} dy$ ובמשפט פוביני כדי לחשב את:

$$\int_0^b \int_0^\infty e^{-xy} \sin x dy dx$$

בשתי דרכים שונות. ע"י זה הוכיחו כי

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

אינטגרל שימושי:

$$\int e^{au} \sin u du = \frac{e^{au}(a \sin u - \cos u)}{1 + a^2} + C$$

הערה. האינטגרלים פתכנסים בהחלט, ולכן אפשר היה לרשום $dm(x), dm(y)$ במקום dx, dy .

תרגיל 4 יהי X אוסף כל הפולינומים עם מקדמים ממשיים $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : p$. ברור כי X הוא מרחב וקטורי¹. לכל פולינום $p \in X$ נגדיר את $\|p\|$ להיות סכום הערכים המוחלטים של המקדמים של p .

האם $\|\cdot\|$ היא נורמה על X ? ואם לא, אילו מאקסיומות הנורמה היא מקיימת?

תרגיל 5 יהי $(X, \|\cdot\|)$ מרחב בנך², ויהי $Y \subseteq X$ תת־מרחב סגור. הוכיחו כי $(Y, \|\cdot\|)$ הוא מרחב בנך.

¹אינן צורך להוכיח זאת.
²מרחב נורמי שלם.