מתמטיקה לכימאים

עוזי חרוש

תוכן העניינים

1 גבולות

תרגיל 1. חשבו את הגבולות הבאים. פרטו את כל שלבי החישוב.

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+1}{2n-3n^2+4}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^6+2n^8+111}+n}{\sqrt[4]{5n^2+n^3+13n^{16}+3}}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n-5}{7-n^2}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^3+n-6}{8n+n^2}$

הערה. יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו-$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש-$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ ו-$|b_n|<M$ אז $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=0$

הערה. יהיו $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו-$\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש-$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ ו-אם $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$

1. אם $b>1$ אז $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)^{a_n}=\infty$
2. אם $-1<b<1$ אז $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)^{a_n}=0$
3. אם $b<-1$ אז $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)^{a_n}$ לא קיים
4. עבור $b=\pm 1$ לא ידוע.

הערה. להלן שני גבולות חשובים מאוד!

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=e^a$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\frac{1}{n}=1$

הערה. אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ (במובן הרחב) אז כל תת סדרה של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ תתכנס לאותו גבול.

מסקנה. אם ל-$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ יש שתי תתי סדרות מתכנסות לגבול שונה אז ל-$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אין גבול.

תרגיל 2. חשבו את הגבולות הבאים, או הראו כי אינם קיימים:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\sin\frac{1}{n}}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2^{\frac{n^3+1}{n-2}}}+\sin\frac{1}{n}\right)$
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(5n-\sqrt{25n^2+6n-8}\right)$
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin(n)-\cos(n-1)}{n}$
6. $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{3\cdot 4^n}{5^n}$
7. $$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{4}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}}$$
8. $$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}+3^{n+1}}{4^n-2^{n+2}}$$

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3^n+(-3)^n\right)$
10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{3n-5}\right)^n$
11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n-\sqrt{n}}{4n+3}\right)^{n^2}$
12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n-2}\right)^n$
13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-1}{n^3+4}\right)^{n^4}$
14. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{2}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$

2 טורים- תרגילים

2.1 טורים חיובים

תרגיל. בדוק האם הטורים באים מתכנסים

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{2^n+8}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2-4n+7}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}+4\sqrt{n}}$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(n)}{3^n}$
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(16+n^2)\sqrt{n-3}}$
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n-5}{2n^3+4}$
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{2n^{\frac{3}{2}}}$
8. $\frac{3}{4}+\frac{5}{9}+\frac{7}{16}+\frac{9}{25}+\frac{11}{36}+$
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln^2(n)}$
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^6(n)}{n^3}$
11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^2(n)}{\sqrt{n^3}}$
12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{5^n}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\sqrt{2}}}{2^n}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n-1}{2n+3}\right)^n$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}$

18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$

19. הוכח ש- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ מתכנס עבור $\alpha > 1$

20. הוכח ש- $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^{\alpha}(n)}$ מתכנס עבור $\alpha > 1$

2.2 טורים כלליים

תרגיל. קבע האם הטורים הבאים מתכנסים בהחלט, מתכנסים בתנאי או מתבדרים.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cos(n^2)}{3^n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos\left(\frac{1}{n}\right)$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n^2+1)}$

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} e^{\frac{1}{n}}$

7. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}\left(1+\frac{1}{\ln n}\right)$

8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+3)!}{3!n!3^n}$

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\ln(n^2+1)} \cos\frac{1}{n}$

10. $1+\frac{1}{3}-\frac{2}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{2}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{2}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}\pm\dots$

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n}$

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n}}{5^{n}-n^{2}}$

2.3 טורי פונקציה

הגדרה. מה זה סדרת פונקציות

דוגמה.

1. $f_n\left(x\right)=x^n$ (ציור)
2. $f_n\left(x\right)=\begin{cases}1-nx & 0\leq x\leq\frac{1}{n}\\ 0 & \frac{1}{n}\leq x\leq 1\end{cases}$ (ציור)

הגדרה. אומרים שסדרת הפונקציות $f_n\left(x\right)$ מתכנסת בנקודה x_0 אם סדרת המספרים $f_n\left(x_0\right)$ מתכנסת למספר ואותו נסמן כ-$f\left(x_0\right)$ ואז הפונקציה f נקראת הפונקציה הגבולית של f_n

הגדרה. תחום כל הנקודות שבהן f_n מתכנסת נקראת תחום ההתכנסות.

תרגיל. מצא את הפונקציה הגבולית ואת תחום ההתכנסות.

1. $f_n\left(x\right)=x^n$
2. $f_n\left(x\right)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$
3. $f_n\left(x\right)=\frac{1}{1+nx}$
4. $f_n\left(x\right)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$
5. $f_n\left(x\right)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}$

הגדרה. סדרת הפונקציות f_n מתכנסת במידה שווה ל-f בקטע $[a,b]$ אם לכל $\epsilon>0$ קיים $N\left(\epsilon\right)$כך שלכל $n>N$ ולכל $x\in[a,b]$ מתקיים $\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|<\epsilon$

דוגמה.

1. $f_n\left(x\right)=\frac{1}{x^2+n}$ (ציור)
2. $f_n\left(x\right)=\frac{nx}{1+n^2x^2}$ (ציור)

משפט. סדרת הפונקציות f_n מתכנסת במידה שווה ל-$f\left(x\right)$ בקטע $[a,b]$ואם ורק אם $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|=0$

תרגיל. בדוק התכנסות במידה שווה בתחום הנתון.

1. $f_n\left(x\right)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}$ לכל x
2. $f_n\left(x\right)=\frac{x}{1+n^2x^2}$ בתחום $0\leq x\leq 1$
3. $f_n\left(x\right)=nxe^{-n^2x^2}$ $0\leq x<\infty$
4. $f_n\left(x\right)=nxe^{-n^2x^2}$ $2\leq x<\infty$

סיכום. בכדי לדעת האם $f_n\left(x\right)$ מתכנסת במש ל-$f_0\left(x\right)$ בתחום מסויים יש לבדוק האם המקסימום של $|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)|=r_n\left(x\right)$ מתכנס ל-0 עבור $n\to\infty$

משפט. אם סדרת פונקציות רציפות f_n מתכנסת במש ל-f_0 אז f_0 רציפה. במידה וסדרת פונקציות רציפות f_n מתכנסת ל-f_0 שלא רציפה אז אין התכנסות במ״ש

דוגמה. $f_n\left(x\right)=x^n$ בקטע $[0,1]$ מתכנסת ל- $f\left(x\right)=\begin{cases}0 & 0\leq x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$ שלא רציפה, לכן אין התכנסות נקודתית.

תרגיל. עבור הפונקציות הבאות, מצא את פונקצית הגבול, תחום התכנסות וקבע האם ההתכנסות בתחום ההתכנסות היא התכנסות נקודתית או במ״ש

1. $f_n\left(x\right)=\frac{\cos(nx)}{1+x^2+n^2}$
2. $f_n\left(x\right)=\cos^{2n}\left(x\right)$
3. $f_n\left(x\right)=x^n\left(1-x^n\right)$
4. $f_n\left(x\right)=\frac{\sin(nx)\cos((n+1)x)}{n}$
5. $f_n\left(x\right)=\frac{2x}{1+n^2x^2}$
6. $f_n\left(x\right)=4-x^n$

תרגיל. בדוק האם ישנה התכנסות במ״ש של הסדרות הבאות התחום הנתון

1. $f_n\left(x\right)=\frac{x^n}{1+x^n}$ בתחום $0\leq x<\frac{1}{2}$
2. $f_n\left(x\right)=\frac{1}{1+x^n}$ $2\leq x\leq 4$
3. $f_n\left(x\right)=\sin^n\left(x\right)$ $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$

3 טורי פוקנציה

3.1 התכנסות נקודתית

הגדרה. תהי $f_n\left(x\right)$ סדרת פונקציות המוגדרות התחום E אז הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n\left(x\right)=f_1\left(x\right)+f_2\left(x\right)+\dots$$

נקרא טור פונקציות, נשים לב שעבור הנקודה $x=x_0$ הטור הנל הוא טור מספרים.

הגדרה. אוסף כל הנקודות שבהם הטור המספרים $\sum_{n=1}^{\infty}f_n\left(x_0\right)$ מתכנס נקרא תחום ההתכנסות של הטור.

תרגיל. מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים הבאים :

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}n^{-\frac{1}{\ln(x)}}$

3.2 התכנסות במ"ש

הגדרה. יהי טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ בתחום E נאמר שהוא מתכנס במידה שווה בתחום $E_0 \subseteq E$ אם סדרת הסכומים החלקיים מתכנסת במ"ש ב-E_0

דוגמה. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n^2}-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right)$ בתחום $|x|<1$

משפט. (קושי) יהי טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ כל שלכל p הוא מקיים

$$S_{n+p}(x)-S_n(x)=\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

אז הטור מתכנס במידה שווה

משפט. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש אם ורק אם שארית הטור מתכנסת ל-0 כלומר

$$sup\left|\sum_{k=n}^{\infty} f_k(x)\right| \to 0$$

משפט. ויירשטרס
יהי טור פונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מוגדר ב-E אם קיים טור מספרים חיובי מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ולכל $x\in E$ מתקיים $|f_k(x)|\le a_k$ החל מ-k מסויים אז הטור הנתון מתכנס במש ב-E.

תרגיל. בדקו התכנסות במש של הטורים הבאים בתחומים הנתונים :

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n^2}-\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right)$ עבור $|x|\le 1$
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{x+2n}$ עבור $x\ge 0$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$ עבור כל x
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2(nx)}{n^3}$ עבור כל x
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{n^2+x^2}$ עבור $-a<x<a$
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^2+n^2+1}$ עבור כל x
7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(nx)}{\sqrt[5]{x^8+n^8}}$ עבור כל x
8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(x)}{n^2+1-\cos^2(n)}$ עבור כל x

משפט. תהי f_n סדרת פונקציות רציפות בקטע $[a,b]$ וטור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במש ב-$[a,b]$ אז

$$\int\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int f_n(x)\,dx$$

משפט. תהי f_n סדרת פונקציות בעל נגזרות רציפות בקטע $[a,b]$ וטור הנגזרות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ מתכנס במש ב-$[a,b]$ והטור המקורי מתכנס קטע $[a,b]$ אז

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$$

דוגמה. מצא את פונקצית הגבול

1. $\sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1}$ בקטע $-1<x<1$
2. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$ בקטע $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$

3.3 טורי חזקות

הגדרה. טור פונקציות הצורה

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

או

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots$$

נקרא טור חזקות, לרוב נדבר על האופציה הראשונה.

משפט. אם טור חזקות מתכנס נקודה $x = \alpha$ אז הוא מתכנס בהחלט לכל x קטע $-\alpha < x < \alpha$

משפט. לכל טור חזקות קיים מספר לא שלילי R המקיים שלכל $|x| < R$ הטור מתכנס ולכל $|x| > R$ הטור מתבדר, ומקרה הזה נאמר ש-R הוא רדיוס ההתכנסות של הטור.

משפט. רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ הוא

1. (קושי)

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

2. (דלמבר)

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

תרגיל. מצא את רדיוס ההתכנסות של הטורים הבאים:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$
4. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$
5. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$
6. $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$
7. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 2^n}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)(n+2)}$
10. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$

4 טור טיילור

הגדרה. טור טיילור של הפונקציה $f(x)$ הגזירה אינסוף פעמים הוא טור החזקות

$$T(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

תרגיל. חשב את טורי טיילור של הפונקציות הבאות:

1. $f(x) = e^x$
2. $f(x) = \sin(x)$
3. $f(x) = \cos(x)$
4. $f(x) = \ln(x+1)$
5. $f(x) = \frac{1}{1-x}$
6. $f(x) = \frac{1}{1+x}$

תרגיל. בעזרת התרגיל הקודם חשבו את טורי טיילור של הפונקציות הבאות

1. $f(x) = \frac{x^m}{1-x}$
2. $f(x) = x\sin\left(x^2\right)$
3. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$
4. $f(x) = \frac{1}{9+x^2}$
5. $f(x) = \ln\left(1+x-2x^2\right)$ רמז: $1+x-2x^2 = (1-x)(1+2x)$
6. $f(x) = \frac{2x}{1+x-2x^2}$ רמז: מצא A, B כך ש- $\frac{2x}{1+x-2x^2} = \frac{A}{(1-x)} + \frac{B}{1+2x}$

משפט: טור טיילור מתכנס לפונקציה בנקודה $x = x_0$ רק אם

$$r_n(x_0) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x_0)^n \to 0$$

תרגיל. חשב את הביטויים הבאים פיתוח טור טיילור עד סדר חמישי והשוואה אותו למספר האמיתי בעזרת המחשבון

1. e
2. $\sin\frac{\pi}{6}$(שימו לב שזה ברדיאנים)
3. $\frac{1}{e}$
4. $\ln 1.5$
5. $\ln 4$ מה המסקנה שלך לגבי התוצאה במקרה זה?

5 פורייה

הגדרה. לכל שתי f, g פונקציות נגדיר את המכפלה הפנימית בניהם להיות

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)g\left(x\right)dx$$

משפט. הקבוצה $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \sin 3x, \cos 3x, \ldots\right\}$ הוא בסיס אורתוגנלי של מרחב הפונקציות הרציפות בקטע $[-\pi,\pi]$ כלומר מתקיים

1.

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)g\left(x\right)dx = \begin{cases} 0 & f\neq g \\ 1 & f=g \end{cases}$$

2. ולכל פונקציה ניתנת להצגה כצירוף לינארי (טור) אינסופי של $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sin nx, \cos nx\right\}$

משפט. לכל $f\left(x\right)$ פונקציה רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$ מתקיים

$$f\left(x\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(nx\right) + b_n\sin\left(nx\right)\right]$$

כאשר

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)\cos\left(nx\right) \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)\sin\left(nx\right) \end{cases}$$

תרגיל. חשב את טור פורייה של הפונקציות הבאות:

1. $f\left(x\right) = x$
2. $f\left(x\right) = x+\pi$
3. $f\left(x\right) = \begin{cases} 1 & x\geq 0 \\ -2 & x<0 \end{cases}$
4. $f\left(x\right) = 2\sin\left(3x\right)$
5. $f\left(x\right) = \cos^2\left(x\right)$
6. $f\left(x\right) = |x|$
7. $f\left(x\right) = e^x$ (תשובה סופית)
8. $f\left(x\right) = x^2$ (תשובה סופית)
9. $f\left(x\right) = |\sin x|$ (תשובה סופית)

תרגיל. חשבו את

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^2}{n^2}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$

משפט. משפט ההתכנסות של דרכילה. בנקודה $x=x_0$ טור פורייה מתכנס לערך $\frac{f\left(x_0^-\right)+f\left(x_0^+\right)}{2}$

משפט. גרעין דריכלה

$$D_m\left(t\right)=\frac{1}{2}+\cos t+\cos 2t+\ldots+\cos mt=\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\left(\frac{1}{2}t\right)}$$

משפט. אם $f\left(-\pi\right)=f\left(\pi\right)$ אז ניתן לבצע גזירה איבר איבר כלומר

$$f'\left(x\right)=\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos\left(nx\right)+b_n\sin\left(nx\right)\right]\right]'=\sum_{n=1}^{\infty}\left[-a_nn\sin\left(nx\right)+b_nn\cos\left(nx\right)\right]$$

משפט. ניתן לבצע אינטגרציה איבר איבר באופן הבא

$$F\left(x\right)=\int f\left(t\right)dt=\frac{a_0x}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{a_n}{n}\sin\left(nx\right)-\frac{b_n}{n}\cos\left(nx\right)\right]+K$$

כאשר

$$K=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F\left(t\right)dt$$

תרגיל. חשב את טור פורייה של x^2

טור טיילור:
חשב את טור טיילור של

1. $\left(1-x^2\right)x^2$ לפתוח סוגריים וזה הטור
2. $\frac{x^2}{1-x^2}$
3. e^{x^2}

6 מדר

6.1 לינארית מסדר ראשון

הגדרה. משוואה מהצורה

$$y'\left(t\right)+p\left(t\right)y\left(t\right)=g\left(t\right)$$

נקראת משוואה לינארית מסדר ראשון.

בכדי לפתור אותה נכפיל ב-$\mu\left(t\right)$ ונקבל

$$\mu\left(t\right)y'\left(t\right)+\mu\left(t\right)p\left(t\right)y\left(t\right)=\mu\left(t\right)g\left(t\right)$$

נדרוש ש-

$$\mu'(t)=\mu(t)\,p(t)$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{\mu'(t)}{\mu(t)}=p(t)$$
$$\Downarrow$$
$$\ln(\mu(t))=\int p(t)\,dt$$
$$\Downarrow$$
$$\mu(t)=e^{\int p(t)dt}$$

ואז נקבל ש-

$$\mu(t)\,y'(t)+\mu(t)\,p(t)\,y(t)=\mu(t)\,g(t)$$
$$\Downarrow$$
$$[\mu(t)\,y(t)]'=\mu(t)\,g(t)$$
$$\Downarrow$$
$$\mu(t)\,y(t)=\int\mu(t)\,g(t)\,dt+C$$
$$\Downarrow$$
$$y(t)=\frac{\int\mu(t)g(t)dt+C}{\mu(t)}$$

תרגיל. פתרו את המד"רים הבאים:

1. $y'+3y=t+e^{-2t}$
2. $y'-2y=t^2e^{2t}$
3. $y'+y=te^{-t}+1$
4. $y'-2y=3e^t$
5. $y'+2ty=2te^{2t^2}$
6. $ty'-y=t^2e^{-t}$
7. $ty'+2y=t^2-t+1$
8. $y'+\frac{2}{t}y=\frac{\cos t}{t^2}$

6.2 שיטת וריאצית הפרמטרים

ננחש פתרון כללי למשוואה $y'(t)+p(t)\,y(t)=g(t)$ מהצורה

$$y=A(t)\,e^{\int -p(t)dt}$$

אם נציב את הפתרון הזה במשוואה נקבל ש-

$$A'(t)=g(t)\,e^{\int p(t)dt}$$

תרגיל. פתרו את המשוואות הבאות בעזרת שיטת וריאציית פרמטרים

1. $y'-2y=t^2e^{2t}$
2. $y'+y=te^{-t}+1$
3. $y'-2y=3e^t$

6.3 משוואות ניתנות להפרדת משתנים

אם המשוואה היא מהצורה

$$y' = M(x)L(y)$$

היא ניתנת לפתירה באופן הבא

$$\begin{gathered} y' = M(x)l(y) \\ \Downarrow \\ \frac{dy}{dx} = M(x)l(y) \\ \Downarrow \\ \frac{dy}{L(y)} = M(x)dx \\ \Downarrow \\ N(y)dy = M(x)dx \\ \Downarrow \\ \int N(y)dy = \int M(x)dx \end{gathered}$$

תרגיל. פתרו את המד״רים הבאים:

1. $y' = \frac{x^2}{y}$
2. $y' = \frac{x^2}{y(1+x^3)}$
3. $y' + y^2 \sin(x) = 0$
4. $y' = \frac{3x^2-1}{3+2y}$
5. $y' = \frac{x-e^{-x}}{y+e^y}$
6. $y' = \frac{x^2}{1+y^2}$

תרגיל. מצאו פתרון פרטי למד״רים הבאים

1. $y' = (1-2x)y^2$ עם תנאי התחלה $y(0) = -\frac{1}{6}$
2. $y' = \frac{1-2x}{y}$ עם תנאי התחלה $y(1) = -2$
3. $xdx + ye^{-x}dy = 0$ עם תנאי התחלה $y(0) = 1$
4. $y' = \frac{y^2}{x}$ עם תנאי התחלה $y(1) = 2$
5. $y' = \frac{2x}{y+x^2y}$ עם תנאי התחלה $y(0) = -2$
6. $y' = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}$ עם תנאי התחלה $y(0) = 1$

6.4 משוואות מדויקות

הגדרה. משוואה מדוייקת היא משוואה מהצורה

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0$$

כאשר מתקיים

$$M'_y(x,y) = N'_x(x,y)$$

משפט. במקרה של משוואה מדויקת קיימת פונקציה $\Psi(x,y)$ כך ש-

$$\begin{cases} \Psi_x(x,y) = M(x,y) \\ \Psi_y(x,y) = N(x,y) \end{cases}$$

ובמקרה זה הפתרון של המד"ר הוא

$$\Psi(x,y) = C$$

תרגיל. פתרו את המד"רים הבאים

1. $(2x+3) + (2y-2)\,y' = 0$
2. $\left(3x^2 - 2xy + 2\right) + \left(6y^2 - x^2 + 3\right) y' = 0$
3. $\left(2xy^2 + 2y\right) + \left(2x^2y + 2x\right) y' = 0$
4. $y' = -\frac{ax+by}{bx+cy}$
5. $(e^x \sin y - 2y \sin x) + (e^x \cos y + 2\cos x)\,y' = 0$

6.5 משוואות לינאריות מסדר שני

הגדרה. משוואה לינארית מסדר שני היא משוואה מהצורה

$$y'' + p(t)\,y' + q(t)\,y = g(t)$$

6.5.1 משוואה לינארית מסדר שני עם מקדמים קבועים

הגדרה. משוואה לינארית מסדר שני עם מקדמים קבועים היא משוואה כאשר הפונקציות $p(t)\,,\,q(t)$ הן פונקציות קבועות כלומר היא מהצורה

$$y'' + ay' + by = g(t)$$

ראשית נתייחס למשוואה הוגנית כלומר כאשר $g(t) = 0$, במצב כזה נתבונן בשורשים λ_1, λ_2 של המשוואה הריבועית

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

- אז $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$y(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

- אז $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$y(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 x e^{\lambda t}$$

- אז $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \alpha \pm \beta i \in \mathbb{C}$

$$y(t) = e^{at}\left(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t\right) e^{\lambda t} + C_2 x e^{\lambda t}$$

תרגיל. פתור את השוואות הבאות:

1. $y'' + 2y' - 3y = 0$
2. $y'' + 3y' + 2y = 0$
3. $6y'' - y' - y = 0$

4. $2y'' - 3y' + y = 0$
5. $y'' + 5y' = 0$
6. $y'' + 2y' + y = 0$
7. $y'' + 4y = 0$

תרגיל. מצא את הפתרון הפרטי המקיים את תנאי ההתחלה :

1. $y'' + y' - 2y = 0$ עם תנאי התחלה $y(0) = y'(0) = 1$
2. $y'' + 4y' + 3y = 0$ עם תנאי התחלה $y(0) = 2,\ y'(0) = -1$
3. $y'' + 4y' + 4y = 0$ עם תנאי התחלה $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

6.6 הורונסקיאן

תהיה מדר הומגנית לינארית מסדר n אז אוסף כל הפתרונות של המד״ר הוא תת מרחב ווקטורי מימד n כלומר קיים לו בסיס על n פונקציות, נרצה למצוא את הבסיס הזה. כדי לברר האם הקבוצה של הפונקציות היא בת״ל נרצה לבדוק אי-תלות. לשם כך נגדיר את הורונסקיאן

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\ f_1' & f_2' & \ldots & f_n' \\ \\ f_1^{(n)} & f_2^{(n)} & \ldots & f_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

אם $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ הן פתרונות של המדר בקטע $[a, b]$ אז $W(f_1, f_2, \ldots, f_n) \neq 0$ בנקודה אם ורק אם $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ בת״ל בקטע. לכן אם נמצא n פונקציות שמקיימות את המד״ר הורונסקיאן שונה מ-0 אז הן בסיס והפתרון הכללי הוא צ״ל שלהן

תרגיל. האם הפונקציות הבאות בת״ל

1. $f_1(t) = t^2 + 5t,\ f_2(t) = t^2 - 5t$
2. $f_1(t) = \cos t,\ f_2(t) = 4\cos^3 t - 3\cos t$
3. $f_1(t) = e^{3t},\ f_2(t) = e^{3(x-1)}$
4. $f_1(t) = 3t + 5,\ f_2(t) = 9t + 15$
5. $f_1(t) = t,\ f_2(t) = \frac{1}{t}$

6.7 פתרון בעזרת טורי חזקות

יהיה f פותרת את מד״ר אם נניח ש-f ניתנת לפיתוח על ידי טור חזקות אז טור חזקות ניתן לגזירה איבר איבר וברגע שנציב את הטורים נקבל תנאי המקדמים, תנאים אלו מגדרים הפיתוח של f לטור

תרגיל. מצאו את תנאי נסיגה על מקדמי הטור החזקות של הפתרון המד״ר והביעו את ששת איברים הראשונים בעזרת a_0, a_1

1. $y'' + y = 0$
2. $y'' - y = 0$
3. $y'' - xy' - y = 0$

4. $y'' + xy' + 2y = 0$
5. $y'' + k^2x^2y = 0$ (קשה)
6. $2y'' + xy' + 3y = 0$

6.8 משוואת אויילר

משוואת אויילר היא משוואה ומהצורה

$$x^2y'' + axy' + bx = 0$$

במצב כזה ננחש פתרון מהצורה $y(x) = x^r$ ונקבל

$$\begin{gathered} x^2y'' + axy' + by = 0 \\ \Downarrow \\ x^2r(r-1)x^{r-2} + axrx^{r-1} + bx^r = 0 \\ \Downarrow \\ r(r-1)x^r + arx^r + bx^r = 0 \\ \Downarrow \\ r(r-1) + ar + b = 0 \end{gathered}$$

מכאן נקבל שני r-ים שפותרים את המשוואה, לכן אם

1. $r_1 \neq r_2$ הפתרון הוא $y(x) = C_1|x|^{r_1} + C_2|x|^{r_2}$
2. $r_1 = r_2$ הפתרון הוא $y(x) = C_1|x|^r + C_2\ln(|x|)|x|^r$
3. $r = a \pm bi$ הפתרון הוא $y(x) = |x|^a(C_1\cos(b\ln|x|) + C_2\sin(b\ln|x|))$

תרגיל. פתרו את המשוואה הבאות:

1. $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$
2. $(x+1)^2y'' + 3(x+1)y' + \frac{3}{4}y = 0$
3. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$
4. $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0$
5. $x^2y'' - xy' + y = 0$
6. $(x-1)^2y'' + 8(x-1)y' + 12y = 0$
7. $x^2y'' + 6xy' - y = 0$

6.9 פתרון סביב נקודה סינגולרית רגולרית

הנקודה $x_0 = 0$ נקראת נקודה סינגולרית של

$$y'' + p(x)y' + q(x) = 0$$

אם

$$\lim_{x\to x_0} xp(x) = p_0$$

וגם

$$\lim_{x\to x_0} x^2q(x) = q_0$$

אז קיים פתרון מהצורה

$$y\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n+r}$$

כדי למצוא את r, a_nנציב את הפונקציה במשוואה

תרגיל. פתרו את המשוואה הבאות סביב $x_0 = 0$

1. $2xy'' + y' - y = 0$
2. $2x^2y'' - xy' + (1+x)\,y = 0$
3. $4xy'' + 2y' + y = 0$
4. $x^2y'' + xy' + (x-2)\,y = 0$

6.9.1 משוואת בסל

המד״ר

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right)y = 0$$

היא משוואת בסל מסדר ν ($\nu \geq 0$) ולה יש נקודה סניגולרית רגולרית ב-0 לכן פותרים אותה כמו בפרק הנ״ל

6.10 התמרת לפלס

הגדרה. תהי $f\left(t\right)$ פונקציה המוגדרת בקטע $0 \leq t < 0$ אז התמרת לפלס שלה היא

$$\mathfrak{L}\left(s\right)=\int_{0}^{\infty}e^{-st}f\left(t\right)dt$$

תרגיל. מצא את התמרת לפלס של הפונקציות הבאות:

1. $f\left(t\right) = t$
2. $f\left(t\right) = t^2$
3. $f\left(t\right) = \cos at$
4. $f\left(t\right) = te^{at}$
5. $f\left(t\right)=\begin{cases}0 & t<2\\ t & t\geq 2\end{cases}$

משפט. התמרת לפלס של נגזרת

$$\begin{array}{lll}
f & \longrightarrow & \mathfrak{L}_f\left(s\right)\\
f' & \longrightarrow & s\mathfrak{L}_f\left(s\right)-f\left(0\right)\\
f'' & \longrightarrow & s^2\mathfrak{L}_f\left(s\right)-sf\left(0\right)-f'\left(0\right)\\
\vdots & & \\
f^{(n)} & \longrightarrow & s^n\mathfrak{L}_f\left(s\right)-s^{n-1}f\left(0\right)-s^{n-2}f'\left(0\right)-\ldots-f^{(n-1)}\left(0\right)
\end{array}$$

לינאריות של התמרת לפלס

$$\alpha f+\beta g \quad\longrightarrow\quad \alpha\mathfrak{L}_f\left(s\right)+\beta\mathfrak{L}_g\left(s\right)$$

תרגיל. פתרו את המד"רים הבאים בעזרת התמרת לפלס

1. $y''+y=f(t)$ עבור $f(t)=\begin{cases}1 & t<\frac{\pi}{2}\\ 0 & \frac{\pi}{2}\le t<\infty\end{cases}$ ו- $\begin{cases}y(0)=0\\ y'(0)=1\end{cases}$

2. $y''+2y'+y=f(t)$ עבור $f(t)=\begin{cases}1 & \pi\le t<\frac{\pi}{2}\\ 0 & else\end{cases}$ ו- $\begin{cases}y(0)=0\\ y'(0)=1\end{cases}$

3. $y''+3y'+2y=f(t)$ עבור $f(t)=\begin{cases}1 & 0\le t<10\\ 0 & 10\le t<\infty\end{cases}$ ו- $\begin{cases}y(0)=0\\ y'(0)=1\end{cases}$

4. $y^{(4)}-y=f(t)$ עבור $f(t)=\begin{cases}1 & 1\le t<2\\ 0 & else\end{cases}$ ו- $\begin{cases}y(0)=0\\ y'(0)=0\\ y''(0)=0\\ y'''(0)=0\end{cases}$

6.11 מערכות של משוואות דיפרנציאליות לינאריות מסדר ראשון

מערכת משוואות דיפרנציאליות לינאריות מסדר ראשון היא מערכת מהצורה

$$\begin{cases}x_1'(t)=p_{11}(t)x_1(t)+\ldots+p_{1n}(t)x_n(t)+g_1(t)\\ x_2'(t)=p_{21}(t)x_1(t)+\ldots+p_{2n}(t)x_n(t)+g_2(t)\\ \vdots\\ x_n'(t)=p_{n1}(t)x_1(t)+\ldots+p_{nn}(t)x_n(t)+g_n(t)\end{cases}$$

ואנחנו מחפשים פונקציות $x_1(t),\ldots,x_n(t)$ הפותרות את המערכת.

6.11.1 מערכות של משוואות דיפרנציאליות הומוגנית עם מקדמים קבועים

במקרה זה המערכת היא

$$\begin{cases}x_1'(t)=p_{11}x_1(t)+\ldots+p_{1n}x_n(t)\\ x_2'(t)=p_{21}x_1(t)+\ldots+p_{2n}x_n(t)\\ \vdots\\ x_n'(t)=p_{n1}x_1(t)+\ldots+p_{nn}x_n(t)\end{cases}$$

ואז אפשר להציג את המערכת כך $X'(t)=AX(t)$ כשאר

$$X(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ \\ x_n(t)\end{pmatrix}$$

ו-

$$A=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n}\\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn}\end{pmatrix}$$

ל-A נמצא הערכים עצמים ווקטורים עצמים ואז הפתרון הכללי הוא

$$X(t)=C_1v_1e^{\lambda_1 t}+C_2v_2e^{\lambda_2 t}++C_nv_ne^{\lambda_n t}$$

תרגיל. פתרו את המערכות המשוואות הבאות

1. $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 2x_1 - 2x_2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1' = x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 3x_1 - 4x_2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 \\ x_2' = 3x_1 - 2x_2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = 4x_1 - 2x_2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1' = -2x_1 + x_2 \\ x_2' = x_1 - 2x_2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_2' = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_3' = 2x_1 + x_2 + x_3 \end{cases}$

במידה ויש ע״ע מרוכבים $\lambda \pm \mu i$ עם ו״ע v_1, v_2 בוחרים את הע״ע עם הסימן + והוע המתקים לו ומחשבים

$$ve^{\lambda t}\left(\cos \mu t + i \sin \mu t\right) = u\left(x\right) + iv\left(x\right)$$

ואז $u\left(t\right), v\left(t\right)$ הם פתרונות הבסיס.

תרגיל. פתרו את המד״רים הבאים

1. $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 4x_1 - x_2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1' = -x_1 - 4x_2 \\ x_2' = x_1 - x_2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - 5x_2 \\ x_2' = x_1 - 2x_2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 \\ x_2' = 5x_1 - 3x_2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 \\ x_2' = -5x_1 - x_2 \end{cases}$

במידה והע״ע זההים אז מוצאים את הו״ע במידה והם בת״ל יש להתייחס אליהם כע״ע שונים במידה ויש ו״ע אחד נעשה את הדבר הבא

תרגיל. פתרו את המד״רים הבאים

1. $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 4x_2 \\ x_2' = x_1 - x_2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1' = -\frac{3}{2}x_1 + x_2 \\ x_2' = -\frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1' = 4x_1 - 2x_2 \\ x_2' = 8x_1 - 4x_2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1' = x_1 - 4x_2 \\ x_2' = 4x_1 - 7x_2 \end{cases}$ עם תנאי התחלה $\begin{cases} x_1(0) = 3 \\ x_2(0) = 2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1' = -\frac{5}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 \\ x_2' = -\frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \end{cases}$ עם תנאי התחלה $\begin{cases} x_1(0) = 3 \\ x_2(0) = -1 \end{cases}$

משוואה החום

הסבר

משוואת הגלים

הסבר