פתרון בוחן אמצע אלגברה ליניארית 2

שאלה 1

יהי $V=M_2(\mathbb{R})$. תהיי $T:V\to V$ העתקה ששולחת כל מטריצה למשוחלפת שלה ז"א $T(A)=A^t$.

א. מצאו את הפולינום האופייני של T.

ב. מצאו את הערכים העצמיים של T.

ג. האם T לכסינה?

פתרון

סעיף א

נמצא תחילה את $[T]$ לפי הבסיס הסטנדרטי $S=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$.

$$T\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right]_S,\ T\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right]_S,\ T\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right]_S,\ T\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right]$$

$[T]=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ נחשב את הפולינום האופייני

$$|\lambda I-[T]|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0&0\\0&\lambda&-1&0\\0&-1&\lambda&0\\0&0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda&-1&0\\-1&\lambda&0\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda^2-1)=(\lambda-1)^3(\lambda+1)$$

סעיף ב

הערכים העצמיים הם $\lambda_1=1,\lambda_2=-1$.

סעיף ג

מספיק למצוא את המימד של המרחב העצמי שמתאים לערך עצמי $\lambda=1$ כדי לבדוק האם T לכסינה.

נמצא בסיס למרחב האפס של המטריצה $\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&-1&0\\0&-1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ לאחר דירוג נקבל $\begin{pmatrix}0&1&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$rank[T]=1 \Rightarrow N[T]=3$ המימד של המרחב העצמי הוא 3 ו T לכסינה.

<u>שאלה 2 (30 נקודות)</u>

נתונות שתי העתקות ליניאריות: $T_1(x,y,z)=(x,y+z,2z)$ ו $T_2(x,y,z)=(x+y+z,y+z,2z)$.

א. מצאו את הפולינום המינימלי עבור כל אחד מההעתקות הנתונות וקבעו איזו העתקה לא לכסינה.
ב. עבור ההעתקה הלא לכסינה מבין ההעתקות הנתונות מצא שני תת מרחבים אינווריאנטים תחת T.
ג. מצא בסיס B כך ש $[T]_B=A_1\oplus A_2$ ורשום את המטריצות $A_1,A_2,[T]_B$.

<u>פתרון שאלה 2</u>

<u>סעיף א</u>

המטריצה המייצגת מעל הבסיס הסטנדרטי היא $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$. המטריצה משולשית, אז הפולינום האופייני הוא $P_A(x)=(x-1)^2(x-2)$, הפולינום המינימאלי חייב להכיל את כל האיברים הבלתי פריקים של הפולינום האופייני ולכן יש שתי אפשרויות לפולינום המינימאלי: $m_A(x)=(x-1)^2(x-2)$ או $m_A(x)=(x-1)(x-2)$. נבדוק אם האופציה השנייה מתאפסת כאשר מציבים את המטריצה A. אם כן, היא הפולינום המינימאלי. אם היא לא מתאפסת, אז הפולינום האופייני (האופציה הראשונה) הוא מינימאלי.

$$A-I=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix},A-2I=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix},(A-I)(A-2I)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן $m_A(x)=(x-1)(x-2)$ הוא הפולינום המינימאלי.

המטריצה המייצגת מעל הבסיס הסטנדרטי היא $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}$. המטריצה משולשית, אז הפולינום האופייני הוא $P_A(x)=(x-1)^2(x-2)$, הפולינום המינימאלי חייב להכיל את כל האיברים הבלתי פריקים של הפולינום האופייני ולכן יש שתי אפשרויות לפולינום המינימאלי: $m_A(x)=(x-1)^2(x-2)$ או $m_A(x)=(x-1)(x-2)$. נבדוק אם האופציה השנייה מתאפסת כאשר מציבים את המטריצה A. אם כן, היא הפולינום המינימאלי. אם היא לא מתאפסת, אז הפולינום האופייני (האופציה הראשונה) הוא מינימאלי.

$$A-I=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix},A-2I=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix},(A-I)(A-2I)=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

לא מתאפס, לכן $m_A(x)=(x-1)^2(x-2)$ הוא הפולינום המינימאלי.
ההכתקה הליניארית השנייה לא לכסינה.

<u>סעיף ב</u>

הריבוי האלגברי של הערך העצמי $\lambda=2$ הוא אחד.
נמצא את הוקטור העצמי ז"א נמצא את מרחב האפס של המטריצה $A-2I$.

$Span\left\{\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ והוא תת מרחב אינווריאנטי.

נמצא את המרחב העצמי המוכלל עבור הערך עצמי $\lambda=1$.

$(A-I)^2=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ מרחב האפס של המטריצה הנ"ל הוא $Span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ והוא תת מרחב אינווריאנטי.

<u>סעיף ג</u>

הבסיס הוא $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ נמצא את $[T]_B$.

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$ סה"כ קיבלנו ש $[T]_B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

$$T\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\\2\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

ז"א $A_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, A_2=(2)$.

<u>שאלה 3 (40 נקודות)</u>

יהי $T:V\to V$ העתקה ליניארית ויהי $p(x)$ פולינום.

א. הוכח ש $\operatorname{Im}(p(T))$ הוא תת מרחב T אינווריאנטי של V.

ב. נניח שהפולינום האופייני של T הוא $p_T(x)=f(x)g(x)$.
הוכח ש $\operatorname{Im}(g(T))\subseteq Ker(f(T))$ ו $\operatorname{Im}(f(T))\subseteq Ker(g(T))$.

ג. נניח ש $f(x),g(x)$ זרים. הוכח ש $V=Ker(f(T))\oplus Ker(g(T))$.
הדרכה:
אם $f(x),g(x)$ פולינומים זרים אז קיימים פולינומים $a(x),b(x)$ כך ש $a(x)f(x)+b(x)g(x)=1$.

<u>פתרון שאלה 3</u>

<u>סעיף א</u>

יהי $v\in\operatorname{Im}(p(T))$ כלומר קיים $u\in V$ כך ש $v=p(T)(u)$.

$T(v)=T\big(p(T)(u)\big)=p(T)\big(T(u)\big)\in\operatorname{Im}(p(T))$. השוויון השני נובע נכך ש T העתקה ליניארית.

<u>סעיף ב</u>

יהי $v\in\operatorname{Im}(g(T))$ כלומר קיים $u\in V$ כך ש $v=g(T)(u)$.

$$f(T)(v)=f(T)\big(g(T)(u)\big)=\big(f(T)g(T)\big)(u)=p_T(T)(u)$$

על פי משפט קיילי המילטון $p_T(T)=0$ ז"א לכל $v\in V$ מתקיים $p_T(T)(v)=0$ ובפרט $p_T(T)(u)=0$.

סה"כ קיבלנו ש $f(T)(v)=0$ כלומר $v\in\ker(f(T))$.

באותו אופן ניתן להוכיח ש $\operatorname{Im}\left(f\left(T\right)\right) \subseteq Ker\left(g\left(T\right)\right)$.

<u>סעיף ג</u>

נוכיח תחילה ש $Ker\left(f\left(T\right)\right) \cap Ker\left(g\left(T\right)\right) = \{0\}$. יהי $v \in Ker\left(f\left(T\right)\right) \cap Ker\left(g\left(T\right)\right)$.

על פי ההדרכה קיימים פולינומים $a(x), b(x)$ כך ש $a(x)f(x) + b(x)g(x) = 1$.

$v = Iv = \left(a(T)f(T) + b(T)g(T)\right)v = a(T)f(T)v + b(T)g(T)v$. מכיוון ש $v \in Ker\left(f\left(T\right)\right) \cap Ker\left(g\left(T\right)\right)$ נקבל ש $f(T)v = g(T)v = 0$ ומהשורה הקודמת נקבל ש $v = 0$.

נוכיח ש $v \in Ker\left(f\left(T\right)\right) + Ker\left(g\left(T\right)\right)$ יהי $v \in V$.

על פי ההדרכה קיימים פולינומים $a(x), b(x)$ כך ש $a(x)f(x) + b(x)g(x) = 1$.

$v = Iv = \left(a(T)f(T) + b(T)g(T)\right)v = a(T)f(T)v + b(T)g(T)v$.

נשים לב ש $a(T)f(T)v \in \operatorname{Im}\left(a(T)f(T)\right), b(T)g(T)v \in \operatorname{Im}\left(b(T)g(T)\right)$.

מסעיף א נקבל
$$\begin{aligned}&\operatorname{Im}\left(a(T)f(T)\right) \subseteq \operatorname{Im}\left(f(T)a(T)\right) \subseteq \operatorname{Im}\left(f(T)\right) \subseteq Ker\left(g(T)\right)\\&\operatorname{Im}\left(b(T)g(T)\right) \subseteq \operatorname{Im}\left(g(T)b(T)\right) \subseteq \operatorname{Im}\left(g(T)\right) \subseteq Ker\left(f(T)\right)\end{aligned}.$$

סה"כ קיבלנו ש $a(T)f(T)v \in Ker\left(g(T)\right), b(T)g(T)v \in Ker\left(f(T)\right)$ כדרוש.