תרגיל 1 אינפי 1 למדמ"ח

אינפיניטסימלים / להגשה עד 21.11, 23.11 או 24.11 בהתאם לתרגול

שימו לב!! לכל הסטודנטים - נא להגיש את התרגיל למתרגל בתרגול! אין הגשה בתאים!

בכל התרגיל H, K אינסופיים חיוביים ו ϵ, δ אינפיניטסימלים חיוביים.

1. הוכיחו את הטענות הבאות:

(א) $\dfrac{1}{H}$ הוא אינפיניטסימל.

(ב) אם ϵ, δ הם אינפיניטסימלים אז $\epsilon \cdot \delta$ הוא אינפיניטסימל.

(ג) אם H אינסופי ו b סופי חיובי שאינו אינפיניטסימל הוכיחו כי Hb אינסופי חיובי.

(ד) אם a, b מספרים סופיים אז ab סופי.

(ה) $\dfrac{H}{K}$ יכול לצאת אינפיניטסימל, מספר סופי שאינו אינפיניטסימל או מספר אינסופי.

<u>פיתרון:</u>

(א) כיון ש־ H חיובי, אז גם $\frac{1}{H}$ חיובי, ולכן צריך להראות שלכל $r > 0$ ממשי מתקיים $\frac{1}{H} < r$.

אכן, יהי $r > 0$ ממשי, מהגדרת H כאינסופי מתקיים $H > \frac{1}{r}$. נחלק את אי השיוויון ב־ H ונכפיל ב־ r (כיוון ששניהם חיוביים הסימן נשאר על צדו) ונקבל $\frac{1}{H} < r$. מש"ל.

(ב) יהי $r > 0$ ממשי, צריך להוכיח ש־ $\epsilon \cdot \delta < r$. שוב, כיון שכל המספרים כאן חיוביים הכפלה בהם לא משנה את צד אי השיוויון. מהגדרת ϵ, δ כאינפיניטסימליים חיוביים נובע $(*)$ $\epsilon < \sqrt{r}, \delta < \sqrt{r}$. ולכן:

$$\epsilon \cdot \delta \overset{*}{<} \epsilon \cdot \sqrt{r} \overset{*}{<} \sqrt{r} \cdot \sqrt{r} = r$$

אי השיוויונים נובעים גם מכלל ההעברה, שכמו שבממשיים הכפלה של איבר במשהו קטנה מהכפלתו במשהו גדול יותר (כשהכל חיובי), כך גם בהיפר ממשיים.

(ג) H, b חיוביים, ולכן (מכלל ההעברה) מכפלתם חיובית. נראה שזה אינסופי: יהי $0 < r \in \mathbb{R}$, צריך להראות ש־ $r < Hb$. מהעובדה ש־ b סופי שאיננו אינפיניטסימל נובע ש־$\frac{1}{b}$ סופי, ולכן $\frac{r}{b}$ סופי. ראינו בתרגול שמספר אינסופי גדול מכל מספר סופי (גם אם איננו ממשי), ולכן $H > \frac{r}{b}$ ולכן $Hb > r$.

(ד) טענת עזר: x סופי אמ"ם $|x|$ סופי. הוכחה: אם $|x| < r$ אזי נקבל $-r < x < r$. מאידך אם $a < x < b$ אז נסמן $c = max\{|a|, |b|\}$ ונקבל $|x| < c$.

כעת, a,b סופיים, ולכן גם $|a|,|b|$, ולכן קיימים x_1,x_2 כך ש־ $|a|<x_1,|b|<x_2$, ולכן $|ab|=|a|\cdot|b|<x_1x_2$ (כולם חיוביים ולכן הסימן נשמר), ולכן $|ab|$ סופי ולכן (לפי טענת העזר) גם ab סופי.

(ה) אינפיניטסימל: ניקח $K=H^2$. סופי שאיננו אינפיניטסימל: ניקח $K=H$. אינסופי: ניקח $H=K^2$.

2. קבעו עבור כל אחד מהמספרים הבאים אם הוא:

- אינפיניטסימלי.
- אינסופי.
- סופי שאינו אינפיניטסימל.
- לא ניתן לקבוע.

הוכיחו קביעתכם. (במקרה שלא ניתן לקבוע הדגימו שיכולים לצאת מצבים שונים)

(א) $\sqrt{H+1}-\sqrt{H}$

(ב) $\dfrac{H+4+\epsilon}{H^2+2\epsilon}$

(ג) $\dfrac{\sqrt{4+\epsilon}-2}{\epsilon}$

(ד) $H\epsilon$

(ה) $H(\sqrt{3+\frac{1}{H}}-\sqrt{3})$

(ו) $\dfrac{\sqrt{H}}{\sqrt{H+1}+\sqrt{H+2}}$

(ז) $\sqrt[3]{H}-\sqrt[3]{H+1}$ (רמז: $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$)

(ח) $\dfrac{(3+\epsilon)(4+\delta)-12}{\epsilon\delta}$

(ט) $\dfrac{H+K}{\sqrt{H^2+K^2}}$ (רמז: חלקו מונה ומכנה ב H והפרידו למקרים)

(י) $\dfrac{H+\sin H}{H-\cos H}$

<u>פיתרון:</u>

(א) מתקיים: $\sqrt{H+1}-\sqrt{H}=\frac{H+1-H}{\sqrt{H+1}+\sqrt{H}}=\frac{1}{\sqrt{H+1}+\sqrt{H}}$, המונה סופי שאיננו אינפיניטסימל והמכנה אינסופי, ולכן זה בסה"כ אינפינטסימל.

(ב) מתקיים: $\dfrac{H+4+\epsilon}{H^2+2\epsilon}=\frac{1+\frac{4}{H}+\frac{\epsilon}{H}}{H+\frac{2\epsilon}{H}}$, ראינו לעיל ש־ $\frac{1}{H}$ אינפיניטסימל, ולכן גם $\frac{4}{H}$. עוד ראינו ש $\frac{\epsilon}{H}$ אינפיניטסימל, ולכן נקבל מונה סופי שאיננו אינפיניטסימל ומכנה אינסופי, שזה כמו סופי כפול אינפיניטסימל ולכן אינפינטסימל.

(ג) מתקיים: $\dfrac{\sqrt{4+\epsilon}-2}{\epsilon}=\frac{4+\epsilon-4}{\epsilon(\sqrt{4+\epsilon}+2)}=\frac{\epsilon}{\epsilon(\sqrt{4+\epsilon}+2)}=\frac{1}{\sqrt{4+\epsilon}+2}$, המכנה סופי שאיננו אינפיניטסימל ולכן זה בסה"כ מספר סופי שאיננו אינפיניטסימל.

(ד) יכול לצאת כל אחת משלוש האפשרויות, הדוגמאות משאלה 1 סעיף (e) מתאימות עבור $\epsilon=\frac{1}{K}$, שראינו שהוא אינפיניטסימל.

(ה) מתקיים: $\frac{1}{\sqrt{3+\frac{1}{H}}+\sqrt{3}} = \frac{H(3+\frac{1}{H}-3)}{\sqrt{3+\frac{1}{H}}+\sqrt{3}} = H(\sqrt{3+\frac{1}{H}}-\sqrt{3})$, המונה והמכנה סופיים שאינם אינפיניטסימלים ולכן המספר כולו סופי שאיננו אינפיניטסימל.

(ו) מתקיים: $\frac{\sqrt{H}}{\sqrt{H+1}+\sqrt{H+2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{H+1}+\sqrt{H+2}}{\sqrt{H}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{H+1}{H}}+\sqrt{\frac{H+2}{H}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{H}}+\sqrt{1+\frac{2}{H}}}$. המונה והמכנה סופיים שאינם אינפיניטסימלים ולכן המספר כולו גם כזה.

(ז) נשתמש ברמז ע"י שנבחר $x=\sqrt[3]{H}, y=\sqrt[3]{H+1}$, ולכן נקבל: $\sqrt[3]{H}-\sqrt[3]{H+1} = \frac{H-(H+1)}{\sqrt[3]{H^2}+\sqrt[3]{H(H+1)}+\sqrt[3]{(H+1)^2}} = \frac{-1}{\sqrt[3]{H^2}+\sqrt[3]{H(H+1)}+\sqrt[3]{(H+1)^2}}$, כאשר המכנה הוא אינסופי ולכן זהו מספר אינפיניטסימלי.

(ח) מתקיים: $\frac{(3+\epsilon)(4+\delta)-12}{\epsilon\delta} = \frac{12+3\delta+4\epsilon+\epsilon\delta-12}{\epsilon\delta} = \frac{3}{\epsilon}+\frac{4}{\delta}+1$. קיבלנו חיבור של שני מספריים אינסופיים חיוביים ו-1, ולכן זה בסה"כ מספר אינסופי.

(ט) מתקיים: $\frac{H+K}{\sqrt{H^2+K^2}} = \frac{1+\frac{K}{H}}{\sqrt{1+(\frac{K}{H})^2}}$. נסמן $M=\frac{K}{H}$. ראינו ש-M יכול להיות כל אחת משלוש האפשרויות. אם הוא אינפיניטסימל או סופי שאיננו אינפיניטסימל אז נקבל מונה ומכנה סופיים שאינם אינפינטסימלים ולכן המספר סופי שאיננו אינפיניטסימל. אם M אינסופי אז נחלק מונה ומכנה ב-M לקבל $\frac{1+\frac{1}{M}}{\sqrt{1+(\frac{1}{M})^2}}$, וכיון ש-$\frac{1}{M}$ אינפיניטסימל אז המונה והמכנה סופיים שאינם אינפיניטסימלים ולכן המספר סופי שאיננו אינפיניטסימל.

(י) מתקיים: $\frac{H+\sin H}{H-\cos H} = \frac{1+\frac{\sin H}{H}}{1-\frac{\cos H}{H}}$. כיון שהפונקציות $\sin, \cos$ חסומות על הממשיים, הן חסומות גם על ההיפר ממשיים, ולכן סופיים. ולכן $\frac{\sin H}{H}, \frac{\cos H}{H}$ אינפיניטסימלים. ובסה"כ המונה והמכנה סופיים שאינם אינפיניטסימלים ולכן המספר כולו כזה.

3. יהיו $a,b\in\mathbb{R}$. עבור אילו ערכי a,b המספר

$$\frac{aH^2-2H+5}{bH^2+H-2}$$

הוא

(א) אינפיניטסימל.

(ב) אינסופי.

(ג) סופי אך לא אינפיניטסימל.

<u>**פיתרון:**</u>

נשים לב ש- $\frac{a-\frac{2}{H}+\frac{5}{H^2}}{b+\frac{1}{H}-\frac{2}{H^2}} = \frac{aH^2-2H+5}{bH^2+H-2}$, כאשר $\frac{5}{H^2}-\frac{2}{H}$ וגם $\frac{1}{H}-\frac{2}{H^2}$ אינפיניטסימלים. לכן:

אם $a,b\neq 0$ נקבל מונה ומכנה סופיים שאינם אינפיניטסימלים, ולכן המספר גם כזה.

אם $a=0, b\neq 0$ נקבל מונה אינפיניטסימלי ומכנה סופי ולכן זהו מספר אינפיניטסימלי.

אם $a\neq 0, b=0$ נקבל מונה סופי ומכנה אינפיניטסימלי ולכן זהו מספר אינסופי.

אם $a=b=0$ נקבל: $\frac{-2+\frac{5}{H}}{1-\frac{2}{H}} = \frac{-\frac{2}{H}+\frac{5}{H^2}}{\frac{1}{H}-\frac{2}{H^2}}$ ולכן המונה והמכנה סופיים שאינם אינפיניטסימלים ולכן המספר כולו כזה.

לסיכום: זהו מספר אינפיניטסימל כאשר $a=0, b\neq 0$, זהו מספר אינסופי כאשר $a\neq 0, b=0$ וזהו מספר סופי שאיננו אינפיניטסימלי כאשר $a=b=0 \vee a,b\neq 0$.

4. בכל אחד מהסעיפים הבאים סדרו את המספרים בסדר עולה, הוכיחו קביעותיכם.

(א) $$7, \quad 4+2\epsilon, \quad 0, \quad -\frac{1}{8\epsilon}, \quad 4+6\epsilon^2,$$

(ב) $$H-H^2, \quad \frac{1}{5H^2}, \quad \frac{1}{3H}, \quad H^2-H, \quad 0, \quad 7,$$

<u>פיתרון:</u>

(א) $-\frac{1}{8\epsilon} < 0 < 4+6\epsilon^2 < 4+2\epsilon < 7$.

הסבר: $-\frac{1}{8\epsilon}$ הוא השלילי היחיד ולכן הכי קטן. שאר המספרים למעט 0 חיוביים ולכן הבא בתור הוא 0. כיון ש־ $6\epsilon^2, 2\epsilon$ הם אינפיניטסימלים ולכן שניהם קטנים מ־1 ולכן $4+6\epsilon^2, 4+2\epsilon < 4+1 = 5 < 7$. נותר להראות ש־ $4+6\epsilon^2 < 4+2\epsilon$. ובכן: $\epsilon < \frac{1}{3} \Rightarrow 3\epsilon^2 < \epsilon \Rightarrow 6\epsilon^2 < 2\epsilon \Rightarrow 4+6\epsilon^2 < 4+2\epsilon$ (המעבר הראשון נובע מהכפלה ב־ 3ϵ שזה מספר חיובי שלא משנה את הסימן. באותו אופן המעבר השני ע"י הכפלה ב־ 2.).

(ב) $H-H^2 < 0 < \frac{1}{H^2} < \frac{1}{3H} < 7 < H^2-H$.

הסבר $H-H^2 = H(1-H)$ ולכן זהו מכפלת אינסופיים אחד חיובי ואחד שלילי ולכן אינסופי שלילי.

$H^2-H = H(H-1)$ שזה מכפלת אינסופיים חיוביים ולכן אינסופי חיובי.

$\frac{1}{5H^2}, \frac{1}{3H}$ שניהם אינפיניטסימלים ולכן בין 0 ל־7. נראה ש־ $\frac{1}{5H^2} < \frac{1}{3H}$: H אינסופי חיובי ולכן $H > \frac{3}{5}$, כעת נקבל $3 < 5H$ ולכן $3H < 5H^2$ (הכפלה ב־ H) ולכן נקבל $\frac{1}{3H} > \frac{1}{5H^2}$ (כמו בממשיים שבהופכיים הסימן מתהפך, אם $a<b$ בממשיים אז $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, ומכלל המעבר זה גם בהיפר ממשיים.)

בהצלחה!