תרגול 9

3 באוגוסט 2020

1 המשך מרחבי מטריצה

תרגילים:

1. תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$. הוכיחו:

   (א) $rank(A+B) \leq rank(A) + rank(B)$

   (ב) $rank(A-B) \geq rank(A) - rank(B)$

   פתרון: א. נשים לב $rank(A+B) = \dim C(A+B)$. נראה $C(A+B) \subseteq C(A)+C(B)$, ואז נקבל $\leq$ לגבי המימדים. ואכן, יהי $v \in C(A+B)$ לכן יש $a_1, \ldots, a_n$ כך ש־

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i C_i(A+B) = \sum_{i=1}^{n} a_i (C_i(A)+C_i(B)) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i C_i(A)}_{\in C(A)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i C_i(B)}_{\in C(B)} \in C(A)+C(B)$$

   ולכן נקבל

$$rank(A+B) = \dim C(A+B) \leq \dim\left(C(A)+C(B)\right) \leq \dim C(A) + \dim C(B) = rank(A)+rank(B)$$

   ב. נשים לב:

$$rank(A) = rank(A-B+B) \underset{\text{a}}{\leq} rank(A-B) + rank(B)$$

   נעביר אגפים ונקבל הדרוש.

2. תהא $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ כך ש־ $rank(A) = r$. הוכיחו שקיימת תת־מטריצה מגודל $r \times r$ הפיכה.

   פתרון: הדרגה נותנת לנו שיש ב־A r שורות בת"ל. ניקח את אותן שורות, ונקבל מטריצה A' מסדר $r \times n$ מדרגה r. שוב, מדרגת המטריצה נקבל שיש ב־A' r עמודות בת"ל. עמודות אלה מהוות תת־מטריצה מגודל $r \times r$ שכל השורות (וכן העמודות) בת"ל, ולכן הפיכה.

2 העתקות לינאריות

2.1 הגדרה

העתקה לינארית היא פונקציה $T : V \to W$ (כאשר V, W מ"ו) המקיימת:

- $\forall \alpha \in \mathbb{F}, v_1, v_2 \in V : T(\alpha v_1 + v_2) = \alpha T(v_1) + T(v_2)$
- מתקיים: $T(0_V) = 0_W$ (אפשר פשוט לרשום $0_V \mapsto 0_W$).

תרגילים:

1. האם הפונקציות הבאות הע"ל:

(א) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ המקיימת $\begin{pmatrix} x+2y-z \\ z+2y-x \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$?

פתרון: יהיו $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, r \in \mathbb{R}$ אזי:

$$T\left(r\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix} rx+a \\ ry+b \\ rz+c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} rx+a+2ry+2b-rz-c \\ rz+c+2ry+2b-rx-a \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} x+2y-z \\ z+2y-x \end{pmatrix} +$$

(ב) $T : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{n+2}[x]$ המוגדרת ע"י $T(p(x)) = x \cdot p(x)$.

פתרון: יהיו $p, q \in \mathbb{R}_n[x], r \in \mathbb{R}$ אזי:

$$T(rp+q) = x(rp+q) = rxp + xq = rT(p) + T(q)$$

(ג) $T : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}$ המוגדרת ע"י $T(A) = tr(A)$.

פתרון: תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}, \alpha \in \mathbb{F}$ אזי:

$$T(\alpha A + B) = tr(\alpha A + B) \underset{*}{=} \alpha tr(A) + tr(B) = \alpha T(A) + T(B)$$

כאשר מעבר $*$ נובע מתכונות העקבה.

(ד) $T : \mathbb{F}^{m\times n} \to \mathbb{F}^{n\times m}$ המוגדרת ע"י $T(A) = A^t$.

פתרון: זו הע"ל מתכונות השחלוף.

(ה) $T : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}^{n\times n}$ המוגדרת ע"י $T(A) = A + I$.

פתרון: נשים לב $T(0) = 0 + I = I \neq 0$ ולכן זו לא הע"ל.

2.2 משפט ההגדרה

יהיו V,W מ"ו, יהי $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס סדור ל־V (נניח ממימד n), ויהיו $w_1,\dots,w_n\in W$ אזי יש הע"ל יחידה $T:V\to W$ המקיימת:

$$\forall 1\le i\le n: T(v_i)=w_i$$

תרגילים:

1. נגדיר $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ ע"י משפט ההגדרה:

$$T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, T\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$$

(א) מצאו את T מפורשות, כלומר, לאן נשלח $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$?

פתרון: נבטא וקטור כללי $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ בעזרת שני הוקטורים המגדיריים את T:

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&1&a\\1&-1&b\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cc|c}1&0&\frac{a+b}{2}\\0&1&\frac{a-b}{2}\end{array}\right)$$

כלומר, $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\frac{a+b}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\frac{a-b}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ ולכן נקבל:

$$T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=T\left(\frac{a+b}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\frac{a-b}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)=\frac{a+b}{2}T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\frac{a-b}{2}T\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\frac{a+b}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\frac{a-}{2}$$

(ב) האם T חח"ע?

פתרון: ניזכר ש־ T חח"ע אמ"ם $\forall v\neq 0: T(v)\neq 0$. אבל כאן $T\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ ולכן T לא חח"ע.

2. הוכיחו או הפריכו:

(א) קיימת $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ המקיימת:

$$T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$$

(ב) קיימת $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ המקיימת:

$$T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$$

פתרון: לפני שניכנס לסעיפים, נבדוק האם הוקטורים מהתחום בת"ל, והתשובה היא שלא:

$$3\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}$$

ולכן כדי שתהיה הע"ל כזו צריך שיתקיים:

$$T\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}=3T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-2T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$$

א. זה אכן עובד ויש הע"ל כזו. למשל זו המוגדרת ע"י שנוסיף:

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18\\-\pi\end{pmatrix}$$

ב. אין הע"ל כזו כי נקבל:

$$T\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}\underset{*}{=}3T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-2T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}$$

כאשר $*$ הכוונה צריך להיות שווה כדי שהפונקציה תהיה הע"ל.

3. תהא $T:V\to W$ הע"ל. הוכיחו:

(א) אם $Tv_1,\ldots,Tv_n$ בת"ל אז $v_1,\ldots,v_n$ בת"ל.

(ב) אם T חח"ע אז: אם $v_1,\ldots,v_n$ בת"ל אז $Tv_1,\ldots,Tv_n$ בת"ל.

פתרון: א. בש.ב.

ב. נניח T חח"ע, ונניח $v_1,\ldots,v_n$ בת"ל. ניקח צ"ל שמתאפס ונבדוק האם המקדמים כולם 0:

$$0=\sum_{i=1}^{n}a_iTv_i=T\left(\sum_{i=1}^{n}a_iv_i\right)$$

אבל כיון ש־T חח"ע נקבל $\sum_{i=1}^{n}a_iv_i=0$ כי העתקה חח"ע שולחת רק את וקטור האפס לוקטור האפס. כיון ש־ $v_1,\ldots,v_n$ בת"ל אז $\forall i:a_i=0$. ולכן $Tv_1,\ldots,Tv_n$ בת"ל.

4. האם קיימת הע"ל חח"ע? אם כן, תנו דוג':

(א) $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}^2$

(ב) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^{2\times 2}$

פתרון: א. לא. ניקח בסיס $B=\{1,x,x^2\}$, ותהי T המוגדרת ע"י $T(1)=v_1,T(x)=v_2,T(x^2)=v_3$, ונניח ש־$T$ חח"ע. לפי סעיף ב נקבל v_1,v_2,v_3 בת"ל, בסתירה לכך שאין שולשה וקטורים בת"ל ב־ $\mathbb{R}^2$.

ב. כן. למשל זו המקיימת:

$$T(e_1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},T(e_2)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},T(e_3)=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$$

קל לראות שמתקיים:

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&y\\z&0\end{pmatrix}$$

ולכן $T(v)=0\iff v=0$.

5. האם קיימת הע"ל על? אם כן, תנו דוג':

(א) $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}^2$

(ב) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^{2\times 2}$

א. כן. למשל זו המקיימת $T(1)=e_1,T(x)=T(x^2)=e_2$

ב. לא. נניח שכן יש T על, לכן נתבונן ב־ $E_{1,1},E_{1,2},E_{2,1},E_{2,2}$ בסיס סטנדרטי ל־W. לכל אחד מהם יש מקור כי T על. לפי סעיף א של תרגיל קודם, כיון שהתמונות בת"ל, גם המקורות בת"ל, וקיבלנו 4 וקטורים בת"ל ב־$\mathbb{R}^3$, בסתירה.