בוחן לינארית 1 קיץ תשפ -פתרון

חלק א

- שאלה ראשונה: יהא $a \in \mathbb{R}$ פרמטר ונגדיר את שלישית הוקטורים

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ a+4 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -a^2+4a-1 \\ a^2-4a+4 \end{pmatrix}$$

ויהא

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ a-2 \end{pmatrix}$$

וקטור נוסף.

1. מצאו את כל ערכי a עבורם $b \notin \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ (אם אין ערכים כאלה - ציינו זאת).
פתרון: נפתור את השאלה: מתקיים כי $b \in \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ אמ"מ קיימים סקלרים כך ש

$$b = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$$

שזוהי המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & a+4 & -a^2+4a-1 & 4 \\ 0 & 0 & a^2-4a+4 & a-2 \end{array}\right)$$

ולכן נדרג ונבדוק מתי למערכת הזאת אין פתרון וזאת תהיה התשובה.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & a+4 & -a^2+4a-1 & 4 \\ 0 & 0 & a^2-4a+4 & a-2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & a+1 & -a^2+4a-4 & 3 \\ 0 & 0 & (a-2)^2 & a-2 \end{array}\right)$$

כעת אם $a \neq -1, 2$ נקבל צורה מדורגת ללא שורת סתירה, ללא משתנים חופשיים ולכן יהיה פתרון יחיד ובפרט יהיה פתרון.

אם $a = 2$ נקבל צורה מדורגת ללא שורת סתירה ולכן יהיה פתרון.

אם $a = -1$ נקבל את המערכת (ונמשיך לדרג)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

שגם היא ללא שורת סתירה ולכן יהיה פתרון.

לסיכום: לכל a יהיה פתרון ולכן לא קיים a עבורו $b \notin \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$

2. מצאו את כל ערכי a עבורם $b \in \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ וגם מתקיים כי v_1, v_2, v_3 ת"ל (אם אין ערכים כאלה - ציינו זאת).
פתרון: נשתמש בחישובים הקודמים

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & a+4 & -a^2+4a-1 & 4 \\ 0 & 0 & a^2-4a+4 & a-2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & a+1 & -a^2+4a-4 & 3 \\ 0 & 0 & (a-2)^2 & a-2 \end{array}\right)$$

ונסיק את התשובה. $b \in \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ שקול לכך שלמערכת יש פתרון (נקרא לה המערכת הלא הומגנית) ו v_1, v_2, v_3 ת"ל שקול לכך שאחרי דירוג של

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & a+4 & -a^2+4a-1 \\ 0 & 0 & a^2-4a+4 \end{pmatrix}$$

יהיה משתנה חופשי (במערכת ההוגמנית שמטריצה זאת מייצת. נקרא לה המערכת ההומגנית). כעת,
אם $a \neq -1, 2$ נקבל במערכת הלא הומגנית צורה מדורגת ללא שורת סתירה, ללא משתנים חופשיים ולכן יהיה פתרון יחיד אבל במערכת ההומגנית לא יהיה משתנה חופשי.
אם $a = 2$ נקבל במערכת הלא הומגנית צורה מדורגת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ללא שורת סתירה ולכן יהיה פתרון ובנוסף במערכת ההומגנית יהיה משתנה חופשי.
אם $a = -1$ נקבל את במערכת הלא הומגנית את המערכת (ונמשיך לדרג)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

שגם היא ללא שורת סתירה ולכן יהיה פתרון. ובמערכת ההומגנית נקבל כי יש משתנה חופשי.
לסיכום: עבור $a = 2$ או $a = -1$ בלבד מתקיים $b \in \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ וגם מתקיים כי v_1, v_2, v_3 ת"ל

3. כתבו ערך a כלשהוא שעבורו v_1, v_2, v_3 בת"ל. עבור ערך זה, מצאו סקלרים $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ המקיימים כי $b = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$.

פתרון: קל להסיק מהחישובים ממקודם כי לכל $a \neq 2$ מתקיים כי v_1, v_2, v_3 בת"ל. בפרט עבור $a = 0$. עבור ערך זה מתקיים (ע"י הצבה בחישובים ממקודם) כי

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & a+4 & -a^2+4a-1 & 4 \\ 0 & 0 & a^2-4a+4 & a-2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & a+1 & -a^2+4a-4 & 3 \\ 0 & 0 & (a-2)^2 & a-2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right)$$

ונמשיך לדרג

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{4} R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -0.5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 - 3R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 2.5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -0.5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -0.5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -0.5 \end{array}\right)$$

ונקבל כי $\alpha_1 = -0.5, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -0.5$ יקיימו כי $b = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$ כנדרש.

4. מצאו את כל ערכי a עבורם $b \in \text{span}\{v_1, v_2\}$ (אם אין ערכים כאלה - ציינו זאת).

פתרון: נשתמש בחישובים הקודמים ונמחק את העמודה מספר 3 שמתאימה ל v_3

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 1 & a+4 & 4 \\ 0 & 0 & a-2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & a+1 & 3 \\ 0 & 0 & a-2 \end{array}\right)$$

ונקבל שיש פתרון למערכת זאת (שזה שקול לכך ש $b \in \text{span}\{v_1, v_2\}$) אמ"מ $a = 2$ (זה המקרה היחידי שאין שורת סתירה).

- שאלה שניה: תהיינה B, C, D מטריצות. נכון/לא נכון - הצדיקו תשובותכם.

1. האם שינוי האיבר $D_{3,4}$ יכול לשנות את ערך האיבר $[BCD]_{2,1}$?

פתרון: לא נכון. בשביל לחשב את $[BCD]_{2,1}$ צריך לדעת את שורה מספר 2 ב B את כל המטריצה C ואת עמודה מספר 1 של D. כיוון ש $D_{3,4}$ לא איבר בעמודה הראשונה של D ולכן שינוי באיבר זה לא יכול לשנות את $[BCD]_{2,1}$

2. אם במטריצה D יש שורת אפסים וגם עמודת אפסים, האם בהכרח במטריצה BCD יש שורת אפסים או עמודת אפסים?

פתרון: נכון. אם במטריצה D יש עמודת אפסים, נניח בעמודה j אזי עמודה מספר j של BCD תהיה עמודות אפסים שהרי לפי כפל עמודה-עמודה נקבל כי

$$\text{Col}_j(BCD) = BC \cdot \text{Col}_j(D) = BC \cdot 0 = 0$$

כנדרש.

3. נתון כי המטריצה B אינה ריבועית אך המטריצה BCD ריבועית. האם בהכרח $BCD \neq I$?

פתרון: לא נכון. למשל $B = (1,0)$ ו $C = (1)$ ו $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ מקיימות כי B אינה ריבועית ו

$$BCD = (1,0)\,(1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

מטריצה ריבועית ששוה למטריצת היחידה מגודל 1×1.

חלק ב

- שאלה שלישית: נתונה הקבוצה

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

שהיא תת קבוצה של $\mathbb{R}^{2\times 2}$. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

1. לכל $A_1, A_2 \in F$ מתקיים כי $A_1 \cdot A_2 \in F$.

פתרון: הוכחה: יהיו $A_1, A_2 \in F$ ונראה כי $A_1 \cdot A_2 \in F$. אכן, מהגדרת F, קיימים a_1, a_2, b_1, b_2 ממשיים כך ש

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}$$

ואז

$$A_1A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2a_1 - b_1b_2 & a_1b_2 + b_1a_2 \\ -b_2a_2 - a_1b_2 & -b_1b_2 + a_1a_2 \end{pmatrix}$$

נגדיר $a = a_2a_1 - b_1b_2$ ו $b = a_1b_2 + b_1a_2$ ונקבל כי $A_1A_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ ולכן ב F כנדרש.

2. לכל $A_1, A_2 \in F$ מתקיים כי $A_1 \cdot A_2 = A_2 \cdot A_1$.

פתרון: הוכחה: יהיו $A_1, A_2 \in F$ ונראה כי $A_1 \cdot A_2 \in F$. אכן, מהגדרת F, קיימים a_1, a_2, b_1, b_2 ממשיים כך ש

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}$$

ואז

$$A_1A_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2a_1 - b_1b_2 & a_1b_2 + b_1a_2 \\ -b_2a_2 - a_1b_2 & -b_1b_2 + a_1a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} = A_2A_1$$

כנדרש.

3. לכל $A \in F$ שאינה מטריצת האפס מתקיים כי A הפיכה ובנוסף $A^{-1} \in F$.

פתרון: הוכחה: תהא $A \in F$ מטריצה שאינה מטריצת האפס ונראה שהיא הפיכה ו $A^{-1} \in F$. אכן, מהגדרת F, קיימים a, b ממשיים כך ש

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

ומכיוון ש A אינה מטריצת האפס, $a \neq 0$ או $b \neq 0$ מתקיים כי

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{-b}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן (לפי משפט מההרצאה) מתקיים $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{-b}{a^2+b^2} \\ \frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$ ובפרט A הפיכה. בנוסף, נגדיר $c = \frac{a}{a^2+b^2}$ ו $d = \frac{-b}{a^2+b^2}$ ונקבל שאלו מספרים ממשיים המקיימים ש $A^{-1} = \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}$ ולכן $A^{-1} \in F$

4. מתקיים כי F הינה תת מרחב וקטורי של $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
פתרון: הוכחה: נראה זאת ע"י הקריטריון המקוצר:

– קיום מטריצת האפס בקבוצה: מטריצת האפס שייכת ל F ויעידו על כך $a = b = 0$.
– סגירות לחיבור: יהיו $A_1, A_2 \in F$ ונראה כי $A_1 + A_2 \in F$. אכן, מהגדרת F, קיימים a_1, a_2, b_1, b_2 ממשיים כך ש

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}$$

ואז

$$A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ -b_1 - b_2 & a_1 + a_2 \end{pmatrix}$$

ולכן אם נגדיר $a = a_1 + a_2$ ו $b = b_1 + b_2$ נקבל כי $A_1 + A_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ ולכן $A_1 + A_2 \in F$

במידה ותבחרו להגיש את השאלה השלישית לבדיקה, ייתכן שתוזמנו לשיחת זום קצרה על המבחן (כתבו במקרה זה "עניתי על השאלה השלישית").

במידה ותבחרו לא להגיש את השאלה השלישית לבדיקה, תקבלו עליה 15 נקודות אוטומטית. (כתבו במקרה זה "לא עניתי על השאלה השלישית").