

תרגיל תיאורטי מספר 2

1. תהי $A \in F^{n \times n}$. הוכח/הפרך :

א. אם יש $n \in \mathbb{N}$ כך ש- A^n הפיכה, אז A הפיכה.

ב. אם $A^2 = I$ או $A = \alpha I$ עבור $\alpha \in F$ כלשהו.

ג. אם לכל $b \in F^n$ יש פתרון למערכת $Ax=b$ אז A הפיכה.

ד. אם $A = B + C$ כך ש- B משולשית עליונה והפיכה ו- C משולשית תחתונה והפיכה

אז A הפיכה.

(מטריצה משולשית עליונה היא מטריצה ריבועית בה כל האיברים מתחת לאלכסון שווים ל-0)

כלומר: אם $j < i$ אז $a_{i,j} = 0$.

מטריצה משולשית תחתונה היא מטריצה ריבועית בה כל האיברים מעל לאלכסון שווים ל-0)

ה. אם A הפיכה ויש B הפיכה כך ש- $AB = BA$ או $AB = I$.

2. תהי $A \in F^{n \times n}$.

נסמן: $V = \text{span}\{R_1(A), \dots, R_n(A)\}$, $W = \{x \in F^n \mid Ax = 0\}$.

א. הוכח: W מרחב וקטורי.

ב. הוכח/הפרך: $V \cap W = \{0\}$.

I. כאשר $F = \mathbb{R}$.

II. כאשר $F = \mathbb{C}$.

רמז: אם $x \in V$ אז יש $b \in F^n$ כך ש- $b^t A = x^t$ (חשבו מדוע...). מה יקרה אם נכפול

את המשוואה ב- x ?

3. יהי V מרחב וקטורי, ותהיינה A, B תתי קבוצות סופיות של V .

א. הוכח: $\text{span}(A \cap B) \subseteq \text{span}(A) \cap \text{span}(B)$. באיזה מקרה מתקבל שוויון?

ב. הוכח: $\text{span}(A) \cup \text{span}(B)$ תת-מרחב וקטורי של $V \Leftrightarrow$

$\text{span}(B) \subseteq \text{span}(A)$ או $\text{span}(A) \subseteq \text{span}(B)$.

4. נתון תת המרחב הוקטורי הבא של \mathbb{R}^4 :

$$V = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

מצא מערכת משוואות לינארית (ניתן לייצגה גם ע"י מטריצה) שאוסף הפתרונות שלה הוא בדיוק V .

5. האם הקבוצה $\{1 + x^2 + 2x^3, 5 + x + 6x^2 + 13x^3, -3 - x - 3x^2 - 8x^3\} \subseteq \mathbb{R}_3[x]$

תלויה לינארית? אם כן, מצא צירוף לינארי לא טריוויאלי שנותן 0, אחרת, הראה שהצירוף הלינארי היחיד שנותן 0 הוא הטריוויאלי.

6. יהיו $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ בת"ל. הוכח כי הקבוצות הבאות בת"ל:

א. $\{v_1 + v_3, v_2, v_3, v_4\}$.

ב. $\{v_1, \alpha v_2, v_3, v_4\}$ כאשר $\alpha \neq 0$ סקלר.

ג. $\{v_1, v_2, v_3 + \alpha v_4, v_4\}$ כאשר α סקלר כלשהו.

7. נתבונן ב- $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ $B = \{A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\}$

האם $\begin{pmatrix} 5 & 39 \\ 18 & 23 \end{pmatrix} \in \text{span}(B)$? אם כן, מצא את הצירוף הלינארית המתאים.