אלגברה לינארית, תשע"ו - פתרון תרגיל 4

1. רשמו את המטריצות הבאות כמכפלה של מטריצות אלמנטריות:

(א) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

פתרון:
נדרג את המטריצה עד שנגיע למטריצת הזהות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{-1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - 3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן $A^{-1} = E_3E_2E_1$ ולכן $A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(ב) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

פתרון:
נדרג את המטריצה עד שנגיע למטריצת הזהות:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן $A^{-1} = E_4E_3E_2E_1$

ולכן $A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. ידוע שאחרי ביצוע 2 הפעולות שורה הבאות על $A_{3\times 3}$ התקבלה המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \rho_1 : R_1 &\leftarrow R_1 + 3R_2 \\ \rho_2 : R_3 &\leftarrow \frac{1}{3}R_3 \end{aligned}$$

מצאו את A.

פתרון:

לפי הנתונים $E_2E_1A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, נכפול בהופכי של E_2 משמאל ואז בהופכי של E_1 משמאל ונקבל

$$A=E_1^{-1}E_2^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&-3\\0&0&1\\0&3&0\end{pmatrix}$$

3. חשבו את $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}^{53}$.

פתרון: נשים לב שהמטריצה שלנו היא מטריצה אלמנטרית, ולכן להכפיל בה 35 פעמים זה כמו לעשות את הפעולה 35 פעמים על מטריצת היחידה.

ולכן: $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\53&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}^{53}$.

4. מצאו את הפתרון הכללי של המערכת הלא הומגית הבאה:

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&1&0\\0&0&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

. רשמו את זה כסכום של פתרון פרטי+ פתרון כללי של המערכת ההומוגנית המתאימה.

פתרון:

נשים לב שw הוא משתנה חופשי. נציב $w=t$ וע"י הצבה לאחור נמצא שהפיתרון הכללי הוא $\begin{pmatrix}1+3t&1-2t&2t&t\end{pmatrix}$.

נפריד את הפתרון $\begin{pmatrix}1+3t\\1-2t\\2t\\t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-2\\2\\1\end{pmatrix}\cdot t$ ונשים לב שהוקטור $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ הוא פתרון פרטי של המערכת, ואילו $\begin{pmatrix}3\\-2\\2\\1\end{pmatrix}\cdot t$ זה בדיוק המרחב של הפתרונות של המערכת ההומוגנית המתאימה.

5. נתונה מערכת משוואות $Ax=b$. וידוע שv_1,v_2 הם פתרונות של המערכת, וש w_1,w_2 הם פתרונות של המערכת ההומוגנית המתאימה. קבעו לגבי הוקטורים הבאים אם הם פתרון של המערכת הלא הומוגנית\הומוגנית או לא פתרון.

(א) v_1-v_2

$A(v_1-v_2)=b-b=0$ ולכן זה פתרון של המערכת ההומוגנית.

(ב) $v_1+w_1+w_2$

$A(v_1+w_1+w_2)=b+0+0=b$ ולכן זה פתרון של המערכת הלא־הומוגנית. [אפשר גם פשוט לצטט את המשפט שלמדנו שפתרון לא הומוגני+פתרון הומוגני=פתרון לא־הומוגני].

(ג) v_1+v_2

$A(v_1+v_2)=b+b=2b$ ולכן זהו לא פתרון כלל.

(ד) $2w_1+v_2$

$A(2w_1+v_2)=20+b=b$ ולכן זהו פתרון של המערכת הלא־הומוגנית. [וכמו קודם, אפשר פשוט לצטט את המשפט].

6. האם התתי־קבוצות של המרחבים הוקטורים המצויינים הן תתי־מרחבים? אם כן־ הוכיחו. אם לא־ נמקו או תנו דוגמא נגדית.

(א) $\left\{\begin{pmatrix} a+b \\ b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a,b\in\mathbb{R}\right\}\subseteq\mathbb{R}^4$.

זהו ת"מ וקטורי.

סגירות לחיבור: $\begin{pmatrix} a+b \\ b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a'+b' \\ b' \\ a' \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (a+a')+(b+b') \\ b+b' \\ a+a' \\ 0 \end{pmatrix}$

סגירות לכפל בסקלר: $c\cdot\begin{pmatrix} a+b \\ b \\ a \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ca+cb \\ cb \\ ca \\ 0 \end{pmatrix}$

(ב) $\left\{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a+b+c=0\right\}\subseteq\mathbb{R}^3$.

זהו ת"מ וקטורי.

סגירות לחיבור: נקח שני וקטורים $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}\in V$, מכיוון שהם ב$V$ אז $a+b+c=0$ וגם $a'+b'+c'=0$.

מתקיים ש $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+a' \\ b+b' \\ c+c' \end{pmatrix}\in V$ כי סכום האיברים הוא $(a+b+c)+(a'+b'+c')=0+0=0$.

סגירות לכפל בסקלר: ניקח $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in V$ כלומר ש $a+b+c=0$. ונקח סקלר k. אזי:

$k \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka \\ kb \\ kc \end{pmatrix} \in V$ כי סכום האיברים הוא $ka+kb+kc = k(a+b+c)=0$.

(ג) $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a \geq 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

זהו לא ת"מ וקטורי! שימו לב שהוא כן סגור לחיבור, אבל הוא לא סגור לכפל בסקלר שכן למשל $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V$ אבל $(-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin V$.

(ד) $\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

זהו ת"מ וקטורי.

סגירות לחיבור:

$$\left(\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) + \left(\alpha' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = (\alpha + \alpha') \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (\beta + \beta') \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in V.$$

סגירות לכפל בסקלר:

$$k \left(\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = (k\alpha) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + (k\beta) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in V.$$