תרגול 7

קשירות

1. הגדרה: מרחב טופולוגיה (X,τ) יקרא לא קשיר אם קיימות קבוצות V,U פתוחות לא ריקות כך ש $X=V\uplus U$ (איחוד זר). אחרת הוא יקרא קשיר.

   (א) הערה: זה שקול להגדרה הבאה: מרחב הוא לא קשיר אמ"ם יש בו תת קבוצה סגוחה לא טריויאלית (כלומר, לא קבוצה ריקה או כל המרחב)

   (ב) דוגמא: $[0,1]\cup(2,3)$ לא קשיר.

   (ג) דוגמא: $\mathbb{R}$ קשיר. $[0,1]$ קשיר.

   (ד) דוגמא: $\mathbb{Q}$עם הטופולוגיה האוקלידית לא קשיר כי $\left(\sqrt{2},\infty\right)\cap\mathbb{Q}$ היא קבוצה סגוחה ב$\mathbb{Q}$.

   (ה) שאלה: האם $(X,\tau_{\text{co-finite}})$ קשיר?
   פתרון: אם X סופית עם יותר מאיבר 1 אזי היא לא קשירה כי נבחר תת קבוצה לא טרי Y ואז $X=Y\uplus Y^c$. במידה ו X אינסופית אזי היא קשירה כי לכל תת קבוצה Y מתקיים כי Y או Y^c אינה פתוחה.

   (ו) תרגיל: נגדיר על $\mathbb{R}$ טופולוגית סורגנפריי כך : τ_S להיות כל הקבוצות שמתקבלות מאיחוד כל שהוא של קטעים מהצורה $[a,b)$ עבור $a<b$. האם קשיר?
   פתרון: לא. נימוק: $[0,\infty)$ סגוח. הסבר: הוא פתוח כאיחוד: $\bigcup[0,n)$. והמשלים שלו פתוח: $\bigcup[-n,0)=(-\infty,0)$.

2. תרגיל: יהי X מרחב טופולוגי ו$A\subseteq X$ תת קבוצה צפופה. הוכיחו שאם A קשירה (עם טופולוגיית תת המרחב, כמובן) אז X קשיר.
פתרון: נניח בשלילה שX לא קשירה. קיימות קבוצות פתוחות לא ריקות U,V כך ש$X=U\uplus V$. אז $A=(U\cap A)\uplus(V\cap A)$, שתיהן פתוחות ב$A$ וזרות. נשים לב שמכיוון שA צפופה, החיתוך שלה עם כל קבוצה פתוחה לא ריקה הוא לא ריק. לכן, $A\cap U, A\cap V\neq\emptyset$, וקיבלנו פירוק לא טריוויאלי של A. סתירה.

3. תרגיל: יהי X מרחב טופולוגי ויהיו $A,B\subseteq X$ תתי קבוצות קשירות כך ש$cl_X(A)\cap B\neq\emptyset$. אז $A\cup B$ קשיר.
הוכחה: נניח בשלילה ש$A\cup B=U\uplus V$ כאשר U וV קבוצות פתוחות בתוך $A\cup B$ (שימו לב שזה לא אומר שהן פתוחות בX).
שלב ראשון: $A\subseteq U\uplus V$. אם $A\cap U, A\cap V\neq\emptyset$, אז $A=(A\cap U)\uplus(A\cup V)$, קבוצות פתוחות ב$A$, בסתירה לקשירות של A. לכן A מוכל רק באחת מהקבוצות.
שלב שני: באופן דומה, גם B מוכל רק באחת מהקבוצות.
שלב שלישי: בה"כ $A\subseteq U, B\subseteq V$. לא ייתכן שניהם מוכלים באותה קבוצה, כי אז הקבוצה השניה ריקה, וזהו פירוק טריוויאלי, בסתירה להנחה.

שלב רביעי: ניזכר כי $cl_{A\cup B}(A) = cl_X(A) \cap (A \cup B)$ (הוכחנו בתרגול קודם), לכן מההנחה נקבל ש $cl_{A\cup B}(A) \cap B \neq \emptyset$.
שלב חמישי: U היא קבוצה סגורה ב$A \cup B$ (כי המשלים שלה ב$A \cup B$ הוא V, שהיא פתוח ב$A \cup B$), ומכיוון שU מכילה את A, היא מכילה גם את $cl_{A\cup B}(A)$. בנוסף הראנו ש$B \subseteq V$, ולכן מהשלב הקודם נקבל ש$U \cap V \neq \emptyset$. סתירה.

4. תרגיל: אם $A \subseteq X$ תת קבוצה קשירה, האם $int(A)$ קשיר?
פתרון: לא. למשל, ב$\mathbb{R}^2$ ניקח שני כדורים סגורים שמשיקים בנקודה. כל כדור סגור הוא קבוצה סגורה, ומכיוון שהם נחתכים נקבל מהתרגיל הקודם שהאיחוד שלהם קשיר. אולם הפנים של האיחוד הוא איחוד של 2 כדורים פתוחים זרים, שאינו קשיר.

5. תרגיל: תמונה רציפה של קשיר הוא קשיר. כלומר תהא $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ רציפה ועל X קשיר, אזי Y קשיר.
פתרון: נניח בשלילה כי קיים פירוק לא טריוויאלי של Y לשתי קבוצות פתוחות זרות. אזי $Y = U \uplus V$ ואזי $X = f^{-1}(U) \uplus f^{-1}(V)$ מכיוון שf על, $f^{-1}(U), f^{-1}(V) \neq \emptyset$. וכמובן שהן פתוחות מרציפות f. בסתירה לקשירות של X.

6. הגדרה: יהי (X, τ) מרחב טופולוגי. נגדיר יחס שקילות על X כך: $x \sim x'$ אמ"מ קיימת תת קבוצה קשירה A כך ש $x, x' \in A$. מחלקות השקילות נקראות רכיבי קשירות.
הערה: רכיב הקשירות של x הוא תת הקבוצה הקשירה המקסימלית שמכילה את x.

(א) לדוגמא: ב (X, τ_{disc}), רכיב הקשירות של x הוא $\{x\}$. הסבר: כל תת קבוצה A בת יותר מאיבר אחד אינה קשירה, כי ניתן לחלק $A = \{x\} \uplus A \setminus \{x\}$, שתיהן קבוצות פתוחות ב$A$. לכן $\{x\}$ היא הקבוצה הקשירה המקסימלית שמכילה את x.

7. תרגיל: במרחב $(\mathbb{R}, \tau_S)$, הישר של סורגנפריי, שהגדרנו לעיל, מהם רכיבי הקשירות?
פתרון: הנקודונים. הסבר: נראה כי אם A בת יותר מאיבר אחד אזי היא לא קשירה. אכן תהא A כזאת ונבחר $a < b \in A$. אז $A = (A \cap (-\infty, b)) \uplus (A \cap [b, \infty))$ איחוד של קבוצות פתוחות לא ריקות (כי a שייך לקבוצה הימנית וb שייך לקבוצה השמאלית).

8. תרגיל: תהא $f : \left(\mathbb{R}, \tau_{|*|}\right) \to (\mathbb{R}, \tau_S)$ רציפה. הוכיחו כי f קבועה.
פתרון: $\mathbb{R}$ קשיר עם הטופולוגיה אוקלידית ולכן התמונה שלו גם קשירה כלומר, $f[\mathbb{R}]$ היא תת קבוצה קשירה ב$(\mathbb{R}, \tau_s)$. אבל בסורגנפריי רק הנקודונים קשריים ולכן התמונה היא נקודון. כלומר, f היא פונקציה קבועה.

בסיסים

1. יהא (X, τ) מ"ט. $B_\tau \subseteq \tau$ (כלומר, אוסף של קבוצות פתוחות בτ) יקרא בסיס לטופולוגיה אם כל קבוצה פתוחה בτ היא איחוד כלשהוא של איברים ב B_τ.

(א) למשל, בכל מ"מ הכדורים הפתוחים הם בסיס.

(ב) הקטעים $[a, b)$ הם בסיס ל τ_S סונגרי.

(ג) הנקודונים בטופלוגיה הדיסקרטית.

2. בהינתן מרחב טופולוגי (X, τ) ובסיס B_τ, קבוצה $O \in B_\tau$ תיקרא "קבוצה פתוחה בסיסית".

3. תרגיל: יהא (Y, τ') מ"ט ויהא $B_{\tau'}$ בסיס לטופולוגיה. פונקציה $f : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ היא רציפה אמ"מ לכל תמונה הפוכה של קבוצת פתוחה בסיסית היא פתוחה.

פתרון:

($\Leftarrow$) ברור.

($\Rightarrow$) תהא U קבוצה פתוחה אזי $U = \cup O_i$ איחוד של קבוצות פתוחת בסיסיות ואז $f^{-1}(U) = \cup f^{-1}(O_i)$ פתוחה כאיחוד של פתוחות.

4. תרגיל: יהא (X, τ) מ״ט ו B_τ בסיס. אזי A קבוצה צפופה אמ״מ היא נחתכת באופן לא ריק עם כל קבוצה פתוחה בסיסית.

פתרון:

($\Leftarrow$) ברור.

($\Rightarrow$) תהא U קבוצה פתוחה אזי $U = \cup O_i$ נבחר $U \subseteq O_i$ ונסיים מכך ש $\emptyset \neq A \cap O_i \subseteq A \cap U$.

5. תרגיל: יהא (X, τ) מ״ט. אזי הוא T_2 אמ״מ ניתן להפריד שתי נקודות בעזרת קבוצות פתוחות בסיסיות.

פתרון:

($\Rightarrow$) ברור.

($\Leftarrow$) יהיו $x_1 \neq x_2$ אזי ניתן להפריד אותם ע״י U_1, U_2 קבוצות פתוחות זרות. מהגדרה $U_1 = \cup O_i,\ U_2 = \cup O'_j$. כעת קיימים i, j כך ש: $x_1 \in O_i, x_2 \in O'_j$ קבוצות פתוחות בסיסיות זרות.

6. הגדרה: תהא X קבוצה ותהא B אוסף תתי קבוצות המקיימת כי חיתוך של כל שניים מ B הוא איחוד כלשהוא של קבוצות מ B. אזי נוכל להגדיר את הטופולוגיה הנוצרת ע״י B להיות כל הקבוצות שהם איחוד כלשהוא של קבוצות מ B. נסמנה τ. נשים לב כי B הוא בסיס ל τ.

   (א) למשל $B = \{a + b\mathbb{Z} :\ a, b \in \mathbb{Z}\}$ הוא בסיס לטופולוגיה על$\mathbb{Z}$.
   הוכחה: אם $x \in (a_1 + b_1\mathbb{Z}) \cap (a_2 + b_2\mathbb{Z}) \neq \emptyset$ אזי

$$(a_1 + b_1\mathbb{Z}) \cap (a_2 + b_2\mathbb{Z}) = (x + b_1\mathbb{Z}) \cap (x + b_2\mathbb{Z}) = x + lcm\{b_1, b_1\}\mathbb{Z}$$

   . $(\subseteq)$. כי $x + b_1 z_1 = x + b_2 z_2$ גורר $b_1 z_1 = b_2 z_2$ ולכן $b_1 z_1 = b_2 z_2 = z\ lcm\{b_1, b_2\}$ וסיימנו.
   $(\supseteq)$ $x + lcm\{b_1, b_1\}\mathbb{Z} \subseteq x + b_i\mathbb{Z}$ ולכן גם בחיתוך.

7. הגדרה: (X, τ) יקרא בעל תכונה B_2 (או בעל תכונת מניה שניה) אם יש לו בסיס בן מניה.

   (א) דוגמא: $\mathbb{R}$ עם הכדורים.$\{B(q, \epsilon) :\ q \in \mathbb{Q}, \epsilon \in \mathbb{Q}_+\}$.

8. תרגיל: האם $(X, \tau_{co-finite})$ הוא B_2?
פתרון: אם X בן מניה אז הוא B_2 כי מספר כל תתי הקבוצות הסופיות הוא בן מניה ולכן גם מספר הקבוצות הפתוחות האפשרי הוא בן מניה.
אחרת X לא בן מניה ואז טענה: הוא לא B_2. הוכחה: אחרת קיים בסיס $\{O_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ בן מניה. לכל i מתקיים כי O_i^c סופי. כיוון שיש מספר בן מניה של i ים נקבל כי קיים x כך ש $x \notin O_i^c$. כעת, $\{x\}^c$ פתוחה ולכן $\{x\}^c = \cup O_{i_j}$ ואז $\{x\} \subseteq \cap O_{i_j}^c$ סתירה.

9. תרגיל: תת מרחב של B_2 הוא B_2.
פתרון: נניח X, τ מ״ט B_2 עם בסיס בן מניה $\{O_i\}$. יהא Y תת מרחב שלו. טענה $\{O_i \cap Y\}$ בסיס. הוכחה: יהא U פתוחה ב X אזי $U = \cup O_{i_j}$ ואז $U \cap Y = \cup \left[O_{i_j} \cap Y\right]$

10. תזכורת: (X, τ) יקרא ספרבילי אם יש תת קבוצה צפופה בת מניה.

11. תרגיל: B_2 גורר ספרבילי.
פתרון: נבחר נקודה מכל קבוצה פתוחה בסיסית. נסמן קבוצה זאת ב A. אזי A נחתכת עם כל קבוצה פתוחה בסיסית ולכן A צפופה והיא בת מניה.

(א) הכיוון השני אינו נכון. למשל X שאינו בן מניה והטופלוגיה הקו-סופית: הוא לא B_2 אבל כן ספרבילי כי עבור קבוצה בת מניה A היא תהיה צפופה ב X. כי הוכחנו שכל תת קבוצה אינסופית היא צפופה.

12. הערה: במרחב מטרי B_2 שקול ספריבילי.

13. תרגיל: l_∞ אינו B_2 (ולכן לא ספרבילי).
הוכחה: נניח בשלילה כי הוא B_2 אזי גם כל תת מרחב הוא B_2. בפרט תת המרחב $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ הסדרות שמורכבות רק מאחדות ואפסים. אבל תת מרחב זה הוא דיסקרטי כי המרחק בין כל שתי סדרות שונות הוא 1. והוא לא בן מניה ולכן הוא לא B_2. (מרחב דיסקרטי הוא B_2 אמ"ם הוא בן מניה).

14. תרגיל: l_1 הוא ספרבילי (ולכן B_2):
הוכחה: ניקח סדרות רציונאליות שמתאפסות לבסוף. נראה שקבוצה זאת נחתכת באופן לא ריק עם כל כדור $B\left(\left(x_n\right), r\right)$. אכן, כיוון ש $\sum\left|x_i\right|<\infty$ קיים N כך ש $\sum_{i=N}^{\infty}\left|x_i\right|<\frac{r}{2}$. בנוסף לכל $i\leq N$ נבחר q_i רצינולי כך ש $\left|x_i-q_i\right|<\frac{r}{2N}$ ואז ההמרחק בין $\left(x_n\right)$ ל $\left(q_n\right)$ שמתאפסת לבסוף הוא $\sum_{i=1}^{N}\left|x_i-q_i\right|+\sum_{i=N}^{\infty}\left|x_i\right|<r/2+r/2=r$.