תרגיל 7 – אלגברה מופשטת 1

1. ענו על הסעיפים הבאים:

1.1. מצאו $\sigma \in S_6$ כך ש $\sigma(12)(34)\sigma^{-1} = (14)(35)$

פתרון: לכל $\sigma \in S_6$, $\sigma(12)(34)\sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(2))(\sigma(3)\sigma(4))$.

לכן על מנת שיתקיים שוויון $(\sigma(1)\sigma(2))(\sigma(3)\sigma(4)) = (14)(35)$ ניתן להגדיר:

$$\sigma(1) = 1$$
$$\sigma(2) = 4$$
$$\sigma(3) = 3$$
$$\sigma(4) = 5$$

ואז, לכל הגדרה שתשלים את זה לתמורה: למשל, נגדיר

$$\sigma(5) = 2$$
$$\sigma(6) = 6$$

נקבל $\sigma \in S_6$ המקיימת $\sigma(12)(34)\sigma^{-1} = (14)(35)$.

הערה: לא היינו חייבים להגדיר

$$\sigma(1) = 1$$
$$\sigma(2) = 4$$
$$\sigma(3) = 3$$
$$\sigma(4) = 5$$

יכולנו להגדיר

$$\sigma(1) = 4$$
$$\sigma(2) = 1$$
$$\sigma(3) = 5$$
$$\sigma(4) = 3$$

ועדיין לכל השלמה של σ לתמורה היינו מקבלים כי

$$\sigma(12)(34)\sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(2))(\sigma(3)\sigma(4)) = (41)(53) = (14)(35)$$

כדרוש.

1.2. כמה תמורות $\sigma \in S_8$ יש כך ש $\sigma(1234)(567)\sigma^{-1} = (1246)(378)$

פתרון: תמורה $\sigma \in S_8$ מקיימת $\sigma(1234)(567)\sigma^{-1} = (1246)(378)$ אם ורק אם היא מצמידה את המחזור (1234) למחזור (1246) ואת המחזור (567) למחזור (378).

כלומר, אם ורק אם $\sigma(1234)\sigma^{-1} = (1246)$ וכן $\sigma(567)\sigma^{-1} = (378)$.

נשים לב: $\sigma(1234)\sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)\sigma(4))$.

מתקיים שוויון $\sigma(1234)\sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)\sigma(4)) = (1246)$

אמ"ם המחזורים $(1246), (\sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)\sigma(4))$ זהים עד כדי סיבוב ציקלי.

כלומר, אמ"ם מתקיימת אחת מארבע האפשרויות הבאות:

1. $\sigma(1)=1,\sigma(2)=2,\sigma(3)=4,\sigma(4)=6$
2. $\sigma(1)=2,\sigma(2)=4,\sigma(3)=6,\sigma(4)=1$
3. $\sigma(1)=4,\sigma(2)=6,\sigma(3)=1,\sigma(4)=2$
4. $\sigma(1)=6,\sigma(2)=1,\sigma(3)=2,\sigma(4)=4$.

בדומה, על מנת שהשוויון $\sigma(567)\sigma^{-1}=(378)$ יתקיים יש שלוש אפשרויות לדרך בה σ מעבירה את $\{5,6,7\}$ ל $\{3,7,8\}$.

לבסוף, כל תמורה $\sigma\in S_8$ המקיימת $\sigma(1234)(567)\sigma^{-1}=(1246)(378)$ מעבירה את הקבוצה $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ לקבוצה $\{1,2,4,6,3,7,8\}$ ולכן בהכרח מעבירה את 8 ל 5.

לכן, בסה"כ יש $4\times3=12$ אפשרויות לתמורה $\sigma\in S_8$ שתקיים את השוויון הדרוש.

1.3. מצאו את כל מחלקות הצמידות ב S_4 ואת הגודל של כל מחלקה.
פתרון: מספר מחלקות הצמידות ב S_4 הוא מספר ה"טיפוסים" של תמורות, כאשר טיפוס של תמורה הוא המבנה של החלוקה שלה למחזורים זרים.
מכיוון שבחלוקה למחזורים זרים, סדר המחזורים לא משנה, ניתן לקחת כל מבנה בצורה שבה הסדר של המחזורים הוא מהגדול לקטן משמאל לימין (למשל, הטיפוס $(.)(..)$ זהה לטיפוס $(..)(.)$. נחשוב על טיפוס זה כעל $(..)(.)$).
לכן, יש התאמה בין הטיפוסים של תמורות ב S_4 לבין מספר החלוקות של S_4 לסכום של מספרים טבעיים המסודרים מהגדול לקטן.
החלוקות המתאימות הן:

$$4=4$$
$$4=3+1$$
$$4=2+2$$
$$4=2+1+1$$
$$4=1+1+1+1$$

או בטיפוסים:

$$(....)$$
$$(...)(.)$$
$$(..)(..)$$
$$(..)(.)(.)$$
$$(.)(.)(.)(.)$$

לכן, מספר מחלקות הצמידות הוא 5 כאשר כל מחלקה מכילה את כל התמורות מהטיפוס המתאים.

נמצא את הגודל של כל מחלקה:
א. $(....)$
אנו בוחרים ארבעה איברים מתוך ארבעה איברים (אפשרות אחת)

ואח"כ מסדרים אותם במעגל ($3!$ אפשרויות).
סה"כ $3!=6$ איברים.

ב. $(.)(...)$
אנו בוחרים שלושה איברים מתוך ארבעה איברים (או באופן שקול – איבר אחד מתוך ארבעה איברים), לכן יש לכך 4 אפשרויות.
אח"כ מסדרים את שלושת האיברים במעגל - $2!$ אפשרויות.
סה"כ $4\cdot 2!=8$ איברים.

ג. $(..)(..)$
אנו בוחרים שני איברים מתוך ארבעה איברים (מה שקובע גם את שני האיברים הנותרים), לכן יש $\binom{4}{2}=\frac{4!}{2!2!}=6$ אפשרויות.
לסידור של כל אחד מהזוגות במעגל יש אפשרות אחת.
מכיוון שהסדר של החילופים לא משנה, יש לחלק בשתיים.
סה"כ 3 איברים.

ד. $(.)(.)(..)$
אנו בוחרים שני איברים מתוך ארבעה איברים, לכן יש $\binom{4}{2}=\frac{4!}{2!2!}=6$ אפשרויות.
לסידור של הזוג במעגל יש אפשרות אחת.
סה"כ 6 איברים.

ה. $(.)(.)(.)(.)$

זהו איבר היחידה ולכן, יש איבר יחיד במחלקה.

שימו לב כי בסה"כ: $6+8+3+6+1=24$ כדרוש.

2. תהי G חבורה (אינסופית). נסמן ב $\Delta(G)$ את קבוצת האיברים שמחלקת הצמידות שלהם סופית. הוכיחו כי $\Delta(G)$ היא תת חבורה נורמלית של G.

הוכחה: ראשית נראה כי $\Delta(G)$ תת חבורה של G.
מכיוון ש $conj(e)=\{e\}$ סופית, $e\in\Delta(G)$.
יהיו $x,y\in\Delta(G)$. צ"ל כי $xy\in\Delta(G)$. אבל,

$$conj(xy)=\{gxyg^{-1}:g\in G\}=\{(gxg^{-1})(gyg^{-1}):g\in G\}\subseteq\{gxg^{-1}:g\in G\}\{gyg^{-1}:g\in G\}$$
$$=conj(x)conj(y)$$

כאשר המכפלה $conj(x)conj(y)$ היא המכפלה של קבוצות שהגדרנו בעבר.
מכיוון ש $x,y\in\Delta(G)$, הקבוצות $conj(x),conj(y)$ סופיות. לכן, גם המכפלה $conj(x)conj(y)$ סופית ו $conj(xy)$ סופית בתור תת קבוצה של קבוצה סופית.
לכן, $xy\in\Delta(G)$.

יהי $x \in \Delta(G)$. צ"ל $x^{-1} \in \Delta(G)$. אבל

$$conj(x^{-1}) = \{gx^{-1}g^{-1} : g \in G\} = \{(gxg^{-1})^{-1} : g \in G\} = conj(x)^{-1}$$

(כלומר, הצמודים של x^{-1} הם בדיוק ההפוכים של הצמודים של x).
בפרט, מכיוון ש $conj(x)$ סופית, $conj(x^{-1}) = conj(x)^{-1}$ סופית.
כעת נוכיח כי $\Delta(G)$ תת חבורה נורמלית.
יהי $x \in \Delta(G)$, $g \in G$. אזי gxg^{-1} צמוד ל g. לכן, $conj(gxg^{-1}) = conj(x)$ סופית. לכן $gxg^{-1} \in G$.
(לחלופין, לפי ההגדרה, ברור כי $\Delta(G)$ היא איחוד של מחלקות צמידות – אכן, אם $x \in \Delta(G)$ אז כל איבר במחלקת הצמידות שלו הוא בעל מחלקת צמידות סופית ובפרט שייך ל $\Delta(G)$. לכן, $\Delta(G)$ ת"ח נורמלית).

3. ענו על הסעיפים הבאים:

3.1 כמה איברים ב S_7 מתחלפים עם $a = (125)$?

פתרון: נתבונן ב S_7 הפועלת על עצמה ע"י הצמדה. $\sigma * \beta = \sigma\beta\sigma^{-1}$.
גודל הדרוש הוא הסדר של המייצב של $a = (125)$ ביחס לפעולת ההצמדה:

$$| Stb(a) | = | \{\sigma \in S_7 : \sigma * a = a\} | = | \{\sigma \in S_7 : \sigma a \sigma^{-1} = a\} | = | \{\sigma \in S_7 : \sigma a = a\sigma\} |$$

אבל $| Stb(a) | = \frac{| S_7 |}{| [a] |}$ כאשר $| [a] |$ הוא גודל המסלול של a, דהיינו גודל מחלקת הצמידות של a. אבל, מחלקת הצמידות של a מכילה בדיוק את כל התמורות הניתנות להצגה כעגיל מאורך 3. יש $\binom{7}{3} 2! = 70$ תמורות כאלה, לכן $| Stb(a) | = \frac{| S_7 |}{| [a] |} = \frac{5040}{70} = 72$. כלומר, מספר האיברים המתחלפים עם $a = (125)$ הוא 72.

3.2 תהי $H \le S_9$ תת חבורה הנוצרת על ידי $(123)(789)$ ו-(345). נניח ש-H פועלת (הפעולה הטבעית) על $X = \{1, 2, 3, ..., 9\}$. כמה מסלולים יש לפעולה זו ומהו סדרם של מסלולים אלו?

פתרון: נסמן $a = (123)(789), b = (345)$.

במסלול של 7 יש לפחות את 8 ו-9, שכן $a(7) = 8, aa(7) = 9$.

במסלול של 1 יש לפחות את 2,3,4,5, שכן
$a(1) = 2, aa(1) = 3, baa(1) = 4, bbaa(1) = 5$.

מצד שני, שני היוצרים a,b מכבדים את החלוקה

$\{1,2,3,4,5\}\cup\{6\}\cup\{7,8,9\}$ ולכן גם שאר האיברים מכבדים חלוקה זו. לכן

יש שלושה מסלולים: $orb(1), orb(6), orb(7)$.

4. ענו על הסעיפים הבאים:

4.1 תהא G חבורה ונתון שקיים $1\neq g\in G$ כך שמחלקת הצמידות שלו מכילה שני איברים. הוכיחו שקיימת ב-G תת חבורה נורמלית לא טריוויאלית.

פתרון: ידוע שעבור פעולת ההצמדה של G על עצמה מתקיים

$|conj(g)|=2$ ולכן $\left[G:C_G(g)\right]=2$ ולכן $C_G(g)\lhd G$.

4.2 תהא $G=S_4$ הפועלת על הקבוצה $X=\{1,2,3,4\}$ ע"י $g*x=g(x)$. חשבו את המייצב של $x=2$. האם המייצב של $x=2$ הוא ת"ח נורמלית של G? נמקו.

פתרון: המייצב של $x=2$ הוא התמורות שלא מזיזות את 2, כלומר:

$A=\{id,(13),(14),(34),(134),(143)\}$. המייצב אינו תת חבורה נורמלית

שכן, למשל, $(23)\notin A$ (מדוע זה אומר שהיא אינה נורמלית?).

5. תנו דוגמה לפעולה נאמנה של חבורה לא טריוויאלית G על קבוצה X עם איבר $x\in X$ כך ש-$Stab(x)=G$.

<u>תזכורת</u>: פעולה היא נאמנה אם רק איבר היחידה פועל באופן טריוויאלי.

פתרון:נבחר $G=X$ כאשר G היא חבורה לא טריוויאלית עם מרכז טריויאלי, למשל $G=D_3$, ונתבונן בפעולת ההצמדה $g*x=gxg^{-1}$. עבור $id\in X$ מתקיים לכל $g\in G$ $g*id=g(id)g^{-1}=id$ כלומר $Stab(id)=G$. נראה שזוהי פעולה נאמנה. יהי $g\neq id$, יש להראות שקיים $x\in X$ כך ש $g*x=gxg^{-1}\neq x$. תנאי זה

אכן מתקיים שכן $g \neq id$ ומכאן $g \notin Z(D_3)$ ולכן קיים $x \in G = X$ כך ש- $gx \neq xg$

ומכאן $gxg^{-1} \neq x$.

6. ענו על הסעיפים הבאים:

6.1 מצאו בכמה דרכים שונות, עד כדי הסימטריה של הריבוע, ניתן לצבוע קודקודים של ריבוע, כאשר כל קודקוד ניתן לצבוע באחד משלושה צבעים שונים. (שימו לב: שתי צביעות יחשבו זהות אם ניתן להגיע מאחת לשניה באמצעות סיבובים ו/או שיקופים.)

פתרון: נסמן ב- X את מרחב הצביעות האפשריות. מתקיים $|X| = 3^4$.

נחשב את כל הגדלים הדרושים:

$g \in D_4$	$\lvert X_g \rvert$	סה"כ
id	3^4	3^4
$\tau, \sigma^2, \tau\sigma^2$	3^2	$3 \cdot 3^2$
σ, σ^3	3	$2 \cdot 3$
$\tau\sigma, \tau\sigma^3$	3^3	$2 \cdot 3^3$

לבסוף, לפי הלמה של ברנסייד, נקבל:

$$k = \frac{1}{8}\left(3^4 + 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^3\right) = \frac{1}{4}\left(3^4 + 3\right).$$

6.2 מצאו כמה לוחות משבצות 3×3 לא שקולים קיימים (עד כדי סימטריות של הריבוע) אם מותר לצבוע כל משבצת באחד משני צבעים שונים.

פתרון: נגדיר את מרחב הפעולה ככל הצביעות האפשריות של הלוח: $X = Z_2^{\,9}$, ונפעל עליו עם החבורה הדיהדרלית D_4. נחשב את כל הגדלים הדרושים:

$g \in D_4$	$\| X_g \|$	סה"כ
id	2^9	2^9
σ, σ^3	2^3	$2 \cdot 2^3$
σ^2	2^5	2^5
$\tau, \sigma\tau, \sigma^2\tau, \sigma^3\tau$	2^6	$4 \cdot 2^6$

לבסוף נקבל על פי הלמה של ברנסייד כי מספר המסלולים הינו 102.

7. לתכשיט בצורת מגן דוד יש שישה משולשים בקצוות. ניתן לצבוע כל משולש באחד משלושה צבעים נתונים. כמה תכשיטים שונים כאלה אפשר לייצר אם ניתן לסובב את התכשיט ולהופכו?
פתרון: צריך לספור את המסלולים השונים עד כדי פעולת החבורה D_6. ניתן לבנות אותה כך:
נמספר את המשולשים בקצוות ב- $1,2,3,4,5,6$ ואז: $D_6 = \langle a,b \rangle$ כאשר:
$b = (1,2,3,4,5,6)$ ו- $a = (2,6)(3,5)(1)(4)$. נקבל:

$$b^2 = (1,3,5)(2,4,6) \quad b^3 = (1,4)(2,5)(3,6) \quad b^4 = (1,5,3)(2,6,4) \quad b^5 = (1,6,5,4,3,2)$$

$$ab = (1,6)(2,5)(3,4) \quad ab^2 = (1,5)(2,4)(3)(6) \quad ab^3 = (1,4)(2,3)(5,6)$$

$$ab^4 = (1,3)(4,6)(2)(5) \quad ab^5 = (1,2)(3,6)(4,5)$$

נרשום את הטבלה הבאה:

$type$	$g \in type$	$\# g \in type$	$\|X_g\|$	סה"כ
$(1)(2)(3)(4)(5)(6)$	id	1	3^6	$3^6 = 729$
(a,b,c,d,e,f)	b, b^5	2	3	$2 \cdot 3 = 6$
$(a,b,c)(d,e,f)$	b^2, b^4	2	3^2	$2 \cdot 3^2 = 18$
$(a,b)(c,d)(e,f)$	b^3, ab, ab^3, ab^5	4	3^3	$4 \cdot 3^3 = 108$
$(a,b)(c,d)(e)(f)$	a, ab^2, ab^4	3	3^4	$3 \cdot 3^4 = 243$

מכאן עפ"י משפט Burnside: $k = \frac{1}{12}(729 + 6 + 18 + 108 + 243) = 92$.

8. נתונה פעולה $G\times X\to X$ כאשר $|G|=49,|X|=23$. הוכיחו כי קיימת לפעולה זו לפחות נקודת שבת אחת.

פתרון: x נקודת שבת משותפת
$\Leftrightarrow |G*x|=1 \Leftrightarrow Stb(x)=G \Leftrightarrow \forall g\in G \ \ g*x=x$.
נתבונן בכל המסלולים של הפעולה וניקח מכל מסלול איבר מייצג אחד. נסמן את קבוצת המייצגים ב- $\{x_1,...,x_k\}$. אזי מתקיים $X=\coprod G*x_i$ ולכן $23=|X|=\sum_{i=1}^{k}|G*x_i|$.

כעת: $|G*x_i|=\frac{|G|}{|Stb(x_i)|}$ ולכן $|G*x_i|\,\|\,|G|$. נתון כי $|G|=49$ והמחלקים שלו הם $\{1,7,49\}$ ולכן קיימים $n,m,l\in N\cup\{0\}$ עבורם מתקיים $|X|=23=n\cdot 1+m\cdot 7+l\cdot 49$.
ברור ש- $l=0$ ולכן $23=n\cdot 1+m\cdot 7$. אם $n=0$ נקבל $23=m\cdot 7$ וזו סתירה. לכן $n>0$ ולכן קיים מסלול שאורכו 1, ולכן קיימת נקודת שבת משותפת לפעולה.

בהצלחה! ☺