בוחן – לינארית למהנדסים, תשע"ד

<u>מתרגלים</u>: אחיה בר און וגילי גולן.
<u>משך הבוחן</u>: שעה וחצי.
<u>חומר עזר</u>: מחשבון.

יש לענות על כל השאלות.
בשאלות ההוכחה יש להקפיד על הוכחה מסודרת הכוללת את כל השלבים והמעברים.
טיעונים חלקיים או לא מוסברים לא יקבלו את מלוא הנקודות.
את התשובות יש לכתוב בטופס הבחינה .
שימו לב כי המחברת ממדור בחינות משמשת כטיוטה ולא תיבדק.

שאלה	ציון
1	
2	
3	
ציון סופי	

בהצלחה! ☺

1. ענו על הסעיפים הבאים:

1.1. (21 נק') נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix}1&0&2&4\\2&1&0&-1\\-3&-1&-2&-3\end{pmatrix}\in M_{3\times4}(R)$.

מצאו בסיסים ומימדים למרחב העמודה, מרחב השורה ומרחב האפס שלה.

פתרון:

בסיס למרחב השורה: נדרג את המטריצה. הדירוג לא משפיע על מרחב השורה.

$$\begin{pmatrix}1&0&2&4\\2&1&0&-1\\-3&-1&-2&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3+3R_1]{R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1&0&2&4\\0&1&-4&-9\\0&-1&4&9\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3+R_2}\begin{pmatrix}1&0&2&4\\0&1&-4&-9\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן, $R(A)=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-4\\-9\end{pmatrix}\right\}$. מכיוון ש $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-4\\-9\end{pmatrix}\right\}$ בת"ל,

$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-4\\-9\end{pmatrix}\right\}$ בסיס למרחב השורה $R(A)$. בפרט, מימד מרחב השורה הוא 2.

בסיס למרחב העמודה: עמודות הצירים במטריצה המדורגת הן העמודה הראשונה והשנייה לכן העמודות המתאימות במטריצה המקורית מהוות בסיס למרחב העמודה. כלומר,

$\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס למרחב עמודה. בפרט מימד מרחב העמודה: 2.

בסיס למרחב האפס: דירוג מטריצה לא משפיע על מרחב האפס שלה. נמצא את מרחב האפס של המטריצה המדורגת. כלומר, נמצא את מרחב הפתרונות למערכת ההומוגנית,

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2&4&0\\0&1&-4&-9&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

נציב, $x_4=s$, $x_3=t$. מהשורה השנייה נקבל, $x_2-4t-9s=0 \Leftarrow x_2=4t+9s$.

ומהשורה הראשונה נקבל, $x_1+2t+4s=0 \Leftarrow x_1=-2t-4s$.

$$N(A)=\left\{\begin{pmatrix}-2t-4s\\4t+9s\\t\\s\end{pmatrix}:s,t\in R\right\}=\left\{t\begin{pmatrix}-2\\4\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-4\\9\\0\\1\end{pmatrix}:s,t\in F\right\}$$

לכן,

$$=span\left\{\begin{pmatrix}-2\\4\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\9\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

מכיוון ש $\left\{\begin{pmatrix}-2\\4\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4\\9\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ בת"ל, זהו בסיס למרחב האפס.

בפרט מימד מרחב האפס הוא 2.

1.2. (17 נק') האם קיימת מטריצה ממשית A שהקבוצה $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right\}$ היא בסיס למרחב העמודה שלה והקבוצה $\left\{\begin{pmatrix}1\\7\\0\end{pmatrix}\right\}$ היא בסיס למרחב האפס שלה?

אם כן, מצאו כזאת. אחרת, הוכיחו כי לא קיימת מטריצה כנ"ל.

פתרון: קיימת כזו, לדוגמה:

$$\begin{pmatrix}7&1&3\\14&2&4\end{pmatrix}$$

2. (23 נק') יהי $V = M_{2x2}(R)$ מרחב וקטורי מעל R.

תהי $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq V$.

אם ניתן, השלימו את S לבסיס של V. אחרת, הוכיחו כי לא ניתן לעשות זאת.

פתרון: ניתן לפתור תרגיל זה בדרך שבה פתרנו תרגיל דומה בכיתה (ההבדל היחיד הוא במספרים בתוך המטריצות). לשם גיוון, נפתור בדרך מעט שונה.

נחשוב על אברי V כעל וקטורים ב R^4 באמצעות ההתאמה

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

ונבדוק אם ניתן להשלים את $S' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ לבסיס של R^4.

נכתוב את וקטורי S' כשורות מטריצה A ונדרג, על מנת למצוא את מרחב השורה של המטריצה.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

בפרט, $R(A) = Span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ומימד מרחב השורה הוא 3.

מכיוון ש**שלוש** השורות של המטריצה A פורשות את המרחב $R(A)$ לפי הגדרתו, ($R(A) = Span(S')$), לפי משפט השלישי חינם, הקבוצה S' היא בסיס של $R(A)$ ובפרט היא בת"ל. לכן, היא ניתנת להשלמה לבסיס.

לפי משפט מהתרגול, אם S' בת"ל ו $v \notin SpanS'$ אז $S' \cup \{v\}$ בת"ל.

ברור כי $R(A) = Span(S') = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} Span \notin v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (מדוע?)

לכן, $S' \cup \{v\} \subseteq R^4$ קבוצה בת"ל בעלת $\dim_R R^4 = 4$ איברים ולכן, לפי משפט השלישי חינם, בסיס ל R^4.

לכן, הוספת המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ל S תשלים אותה לבסיס של V.

הערה: במקרה שלא מזהים מיידית וקטור שלא שייך ל $Span(S')$ ניתן לבדוק מתי וקטור מהצורה $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ שייך ל $Span(S')$ ע"י פתרון מערכת משוואות.

הוקטור $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ שייך ל $Span(S') = Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, אמ"ם למערכת הבאה יש פתרון:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 2 & 1 & 0 & b \\ 2 & 3 & 2 & c \\ 1 & 1 & 0 & d \end{array}\right)$$

נדרג ונקבל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 2 & 1 & 0 & b \\ 2 & 3 & 2 & c \\ 1 & 1 & 0 & d \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b-2a \\ 0 & 3 & 2 & c-2a \\ 0 & 1 & 0 & d-a \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b-2a \\ 0 & 3 & 2 & c-2a \\ 0 & 0 & 0 & d-b+a \end{array}\right)$$

למערכת יש פתרון אמ"ם $d-b+a=0 \Leftrightarrow a=b-d$. לכן,

$$Span(S') = \left\{\begin{pmatrix} b-d \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} : b,c,d \in R\right\}.$$

כעת, קל לבחור וקטור שלא שייך ל $Span(S')$, למשל $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

.3 יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

3.1. (20 נק') תהי $A \in M_{n\times n}(F)$ מטריצה ריבועית. אזי:
$C(A)=F^n$ או $N(A)\neq 0$.

הוכחה: אם $N(A)\neq 0$, סיימנו. לכן, מספיק להוכיח כי אם $N(A)=0$ אז $C(A)=F^n$.
אבל, $N(A)=0 \Leftarrow \dim_F N(A)=0$. לכן, לפי משפט המימדים,

$$\dim_F N(A)+Rank(A)=n \Rightarrow$$
$$0+Rank(A)=n \Rightarrow$$
$$Rank(A)=n$$

לכן, $\dim_F C(A)=RankA=n$. אבל, $C(A)\leq F^n$ תת מרחב וקטורי מאותו מימד סופי.
לכן, $C(A)=F^n$.

3.2. (19 נק') יהי V מרחב וקטורי ו $A,B\subseteq V$. אזי:
$span(A\cap B)=span(A)\cap span(B)$.

הפרכה: יהיו $V=R^2$, $A=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$, $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$. A,B בת"ל מגודל 2, לכן בסיסים ל $V=R^2$. לכן, $span(A)=span(B)=R^2$ ו $span(A)\cap span(B)=R^2$.
לעומת זאת
$span(A\cap B)=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}\neq R^2$. לכן, $span(A\cap B)\neq span(A)\cap span(B)$.