

תרגיל 5 באינפי 3

1. חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציות הבאות בכל נקודה בה הן מוגדרות:

$$f(x, y) = x^3 + 3y^2 - \frac{x}{y} \quad (\text{א})$$

$$f(x, y) = e^{\cos(xy)} \quad (\text{ב})$$

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (\text{ג})$$

$$f(x, y, z) = \ln(x^3 + y^3 - z^3) \quad (\text{ד})$$

2. חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה. האם f'_x רציפה ב $(0, 0)$? האם f'_y רציפה ב $(0, 0)$?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

3. באילו נקודות במישור הפונקציות הבאות דיפרנציאביליות? הוכח. (שימו לב שהשאלה היא לא רק לגבי $(0, 0)$ אלא לגבי כל הנקודות במישור).

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (\text{א})$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (\text{ב})$$

$$f(x, y) = \ln(x^4 + y^6 + 1) \quad (\text{ג})$$

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{y^2}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (\text{ד})$$

4. נגדיר את $f(x, y) = (xy)^{\frac{2}{3}}$ על כל המישור \mathbb{R}^2 .

(א) מצא את הנגזרת $f'_x(x, y)$ בכל נקודה בה היא קיימת.

(ב) האם $f'_x(x, y)$ חסומה בסביבת $(0, 0)$?

(ג) הוכח כי $f(x, y)$ דיפרנציאבילית ב $(0, 0)$.

5.

(א) תהי פונקציה דיפרנציאבילית בנקודה $(0, 0)$. נגדיר

$$h(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & xy > 0 \\ 0 & xy \leq 0 \end{cases}$$

הוכיחו כי אם מתקיים

$$f(0, 0) = 0, \quad f'_x(0, 0) = 0, \quad f'_y(0, 0) = 0$$

אז $h(x, y)$ דיפרנציאבילית ב $(0, 0)$.

ב) תהינה $f(x, y)$, $g(x, y)$ שתי פונקציות דיפרנציאביליות בנק' $(0, 0)$. נגדיר

$$h(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & xy \geq 0 \\ g(x, y) & xy \leq 0 \end{cases}$$

הוכיחו כי אם מתקיים $g(0, 0) = f(0, 0)$ וגם $g'_x(0, 0) = f'_x(0, 0)$ $g'_y(0, 0) = f'_y(0, 0)$ אזי $h(x, y)$ דיפרנציאבילית ב- $(0, 0)$.

שאלה 6

מצא את הגבולות החוזרים ואת הגבול הכפול (במידה ואלו קיימים) של הפונקציות הבאות:

$$(1) \quad f(x, y) = \frac{y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{בנקודה } (0, 0)$$

$$(2) \quad f(x, y) = \frac{x \sin(\frac{1}{x}) + y}{x + y} \quad \text{בנקודה } (0, 0)$$