

112-89 אלגברה ליניארית
 סמסטר א', תשס"ז—מועד א'
 05.02.07

לקבלת כל הנקודות הציגו את כל העבודה הדרושה בפתרון. יש לנמק כל חישוב נדרש.
 חומר עזר אינו מותר. משך הבחינה 2.5 שעות. בהצלחה!!

חלק א'

ערך כל סעיף כמסומן.

1. [15] נתונה המערכת הבאה מעל i :

$$2x_1 - x_2 + (4/3)x_3 - x_4 = 0$$

$$x_1 + (2/3)x_3 - x_5 = 0$$

$$9x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0$$

מצא/י בסיס למרחב הפתרונות של המערכת.

2. [10] יהיו $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & 2i \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, כאשר $(i = \sqrt{-1})$

(א) מצא/י את A^{-1} .

(ב) מצא/י את C מטריצה 3×2 כך ש $B = CA$?

3. [15] נתונה מערכת משוואות $Ax = b$ כאשר A היא מטריצה $m \times n$. עגל "נכון" אם הטענה היא נכונה, ו- "לא נכון" אם הטענה היא איננה נכונה.

(א) אם $\text{rank } A = m$ ו- $m < n$ לא ייתכן שיש פתרון יחיד למערכת. נכון / לא נכון.

(ב) אם v_1, v_2, v_3 הם פתרונות של המערכת אזי $5v_1 - 6v_2 + 2v_3$ הוא

פתרון של המערכת אם ורק אם $b = \vec{0}$. נכון / לא נכון.

(ג) למטריצה אלמנטארית יש 1-ים על האלכסון. נכון / לא נכון.

4. [10] יהי V מרחב ווקטור מעל שדה F . נתון ש $\dim V = 5$. נתונים U ו W תתי-מרחב מממד 3 של V . נתון ש $\dim(U + W) = 4$.

(א) מצא/י את $\dim(U \cap W)$.

(ב) יהי $F = \mathbb{C}$ השדה עם שני איברים. כמה בסיסים שונים יש לתת-המרחב $U \cap W$?

5. [10] יהי V מרחב המטריצות $C^{2 \times 2}$ מעל F .

(א) בהינתן ש $F = \mathbb{R}$ אזי $\dim V =$ _____ .

(ב) בהינתן ש $F = \mathbb{C}$ אזי $\dim V =$ _____ .

חלק ב'

ערך כל שאלה 20 נקודות.

1. תהי $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{K}, \mathbf{w}_m\} \subseteq V$ קבוצה הפורשת מרחב וקטורי V . הוכחי שיש ל S תת-קבוצה $T = \{\mathbf{w}_{i_1}, \mathbf{w}_{i_2}, \mathbf{K}, \mathbf{w}_{i_n}\}$ כך ש $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq m$, היא מהווה בסיס ל V .

2. תהי A מטריצה $n \times n$ מעל שדה F . הוכחי ש A היא מטריצה הפיכה אם ורק אם ניתן לכתוב את A כמכפלה של מטריצות אלמנטאריות.