טכניקות ותרגילים שנלמדו בקורס 84-172 שנת תשפ"א

נושאים

מרוכבים

- חיבור וכפל מספרים מרוכבים, העלאה בחזקה שלימה
- מעבר בין הצורות הקרטזית והקוטבית של מספרים מרוכבים
- מציאת n השורשים המרוכבים השונים של מספר מרוכב, כלומר מציאת הפתרונות למשוואה $z^n = a + bi$
- פתרון משוואה מהצורה $(a + bi)z = c + di$

וקטורים

- סכום, כפל בסקלר ומכפלה סקלרית
- מציאת אורך של וקטור, וזוית בין וקטורים
- קביעה אם קבוצת וקטורים היא ת"ל או בת"ל
- האם ניתן לייצר וקטור מסויים באמצעות קבוצת וקטורים נתונה
- מציאת בסיס לחיתוך בין תתי מרחבים

פונקציות לינאריות

- הצגת פונקציה לינארית ע"י מטריצה, ומעבר בין הנוסחא המפורשת למטריצה בשני הכיוונים
- מציאת ההעתקה בהינתן התמונות של איברי הבסיס
  (למשל אם $T(1,0) = (a,c), T(0,1) = (b,d)$ אז $[T] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$)
- מציאת בסיס ומימד לגרעין ולתמונה של העתקה לינארית

מטריצות ומערכות משוואות

- דירוג ודירוג קנוני של מטריצה, ובפרט של מטריצה עם פרמטרים
- מציאת כמות הפתרונות של מערכת משוואות הומוגנית ואי הומוגנית
- מציאת הפתרון הכללי למערכת משוואות הומוגנית ואי הומוגנית
- חיבור כפל בסקלר וכפל מטריצות
- מציאת מטריצה הופכית
- פתרון מערכת משוואות באמצעות המטריצה ההופכית

לכסון, ע"ע וו"ע

- דטרמיננטה של מטריצה 2×2
- מציאת פולינום אופייני, ע"ע וו"ע
- מציאת מטריצות P, D כך ש $D = P^{-1}AP$
- העלאת מטריצה בחזקה שלמה באמצעות לכסון

חדו"א בשני משתנים

- חישוב גבול של פונקציה בשני משתנים
- קביעת רציפות של פונקציה בנקודה
- מציאת משוואת מישור משיק
- מציאת ומיון נקודות קריטיות
- מציאת מקסימום ומינימום בתחום

אינטגרלים כפולים

- חישוב אינטגרל בתחום מלבני
- חישוב אינטגרל בתחום שאינו מלבני
- מעבר לקואורדינטות קוטביות

תרגילים לדוגמא

1. מצאו את כל הפתרונות לכל אחת מן המשוואות הבאות:

א. $z^5 = 1$

ב. $(1+i)z^4 = 1-i$

ג. $z^3 + 1 = cis\,(60°)$

ד. $z^3 = 2z$

ה. $z^3 = (1+i)^{10} + (1-i)^{10}$

2. מצאו את הזויות בין זוגות הוקטורים הבאים:

א. $\vec{v} = (3,3), \vec{u} = (0,-2)$

ב. $\vec{v} = (1,2,3), \vec{u} = (-1,-1,1)$

ג. $\vec{v} = (3,0,4), \vec{u} = (1,\sqrt{26},3)$

3. בכל סעיף, קבעו האם קיים מישור העובר בראשית הצירים ובין שלושת הנקודות הנתונות:

א. $(1,2,3), (1,-2,0), (-1,6,3)$

ב. $(0,0,3), (1,2,3), (0,2,3)$

4. בכל סעיף מצאו את כל ערכי הפרמטרים עבורם הוקטורים ת"ל:

א. $(a,1,1), (1,a,1), (1,1,a)$

ב. $(1,2,3), (-2,-4,-6), (a,b,c)$

ג. $(1,0,1), (-1,-1,-2), (1,a,2)$

5. קבעו באילו תנאים על הפרמטרים a,b,c מתקיים כי הוקטור (a,b,c) נמצא במישור העובר בראשית הצירים ובשתי הנקודות $(1,0,1), (0,-1,2)$

6. מצאו בסיס לישר החיתוך בין המישור $x+y+z=0$ למישור $2x-y-z=0$

7. עבור אילו ערכי a שלושת המישורים הבאים עוברים דרך אותו ישר?

$x+y+z=0$, $y+az=1$, $x+2y+2z=a^2$

8. מצאו בסיס ומימד לגרעין ולתמונה של ההעתקות הבאות:

א. $T(x,y,z) = (x+y, z-x)$

ב. $T(x,y,z) = (x+4y+7z, 2x+5y+8z, 3x+6y+9z)$

ג. ההעתקה T שהמטריצה המייצגת שלה היא $[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

ד. ההעתקה T שמקיימת כי $T(1,0) = (1,-2)$ וכן $T(0,1) = (-2,4)$

9. מצאו לכל ערכי הפרמטרים האם למערכת המשוואות יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרון כלל

א. $$\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+az=1 \\ x+2y+2z=a^2 \end{cases}$$

ב. המערכת האי הומוגנית המתאימה למטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & a \\ 0 & -1 & | & b \\ 1 & 2 & | & c \end{pmatrix}$

ג. המערכת ההומוגנית המתאימה למטריצה $\begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 2 & -4 & b \\ 3 & -6 & c \end{pmatrix}$

10. מצאו את הפתרונות הכלליים למערכות המשוואות הבאות

א. $$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$$

ב. $$\begin{cases} x-y+z=1 \\ y+z=2 \end{cases}$$

ג. המערכת ההומוגנית המתאימה למטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

11. קבעו לכל אחת מן המטריצות הבאות אם היא הפיכה, ואם כן מצאו את ההופכית שלה

א. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

ב. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ג. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

ד. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

12. הביעו את הפתרונות למערכות המשוואות הבאות באמצעות הפרמטרים a, b, c

א. $$\begin{cases} x+2y=a \\ 3x+4y=b \end{cases}$$

ב. $$\begin{cases} x+y+z=a \\ -y+2z=b \\ 2x+y+z=c \end{cases}$$

13. לכסנו את המטריצות הבאות. כלומר, מצאו מטריצות P, D כך שP הפיכה, D אלכסונית, וכן $D = P^{-1}AP$

א. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

ב. $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

14. עבור כל אחת מהמטריצות בשאלה קודמת, חשבו את A^n כאשר $n \in \mathbb{N}$ פרמטר.

15. קבעו לכל ערך של הפרמטר a אם המטריצות הבאות לכסינות

א. $\begin{pmatrix} a & a^2 \\ 0 & a \end{pmatrix}$

ב. $\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$

ג. $\begin{pmatrix} a - a^2 & a^2 \\ a - 2a^2 & 2a^2 \end{pmatrix}$

16. קבעו האם הפונקציות הבאות רציפות בנקודה $(0,0)$

א. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

ב. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

ג. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^3+xy^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

ד. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

17. בכל אחד מן הסעיפים, מצאו את משוואת המישור המשיק לפונקציה הנתונה $f(x,y)$ בנקודה הנתונה C

א. $f(x,y) = x^2 + 3xy + xy^2$, $C = (-1,1)$

ב. $f(x,y) = xe^{xy}$, $C = (1,1)$

ג. $f(x,y) = x^3y + \sin(xy^2)$, $C = (0,0)$

18. בכל אחד מן הסעיפים, מצאו את הנקודות הקריטיות (בהן הגרדיאנט מתאפס) וסווגו אותן (מינ', מקס' או אוכף)

א. $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 6y^2$

ב. $f(x,y) = 2x^2y - y^2 + x^4 + 8x$

ג. $f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y$

19. תהי פונקציה $f(x,y) = x^2y + x$

א. מצאו נקודה בה המישור המשיק לפונקציה הוא $z = 5x + y - 4$

ב. מצאו נקודה בה המישור המשיק לפונקציה הוא $2z - 10x - 2y = 8$

20. בכל אחד מן הסעיפים הבאים, מצאו את הערך המקסימלי והערך המינימלי של הפונקציה $f(x,y)$ בתחום D

א. $D = \{(x,y)|x^2 + y^2 \le 1\}$,$f(x,y) = \frac{x^2}{2} + y^2$

ב. $D = \{(x,y)|x^2 + y^2 \le 1\}$,$f(x,y) = \frac{x^2(y+1)}{2}$

ג. $D = \{x^2 + 2y^2 \le 1\}$,$f(x,y) = x + y$

21. בכל אחד מן הסעיפים הבאים, חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_D f(x,y)dxdy$

א. $D = \{(x,y)|1 \le x \le 2, 1 \le y \le 3\}$,$f(x,y) = x + y$

ב. $D = \{(x,y)|0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi\}$,$f(x,y) = xy\cos(x^2y)$

ג. $D = \{-1 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x^2\}$,$f(x,y) = x + y$

ד. $D = \left\{0 \le y \le 1, -\sqrt{1-y} \le x \le \sqrt{1-y}\right\}$,$f(x,y) = x + y$

ה. $D = \{(x,y)|0 \le x \le 1, x \le y \le 1\}$,$f(x,y) = \frac{1}{1+y^2}$

ו. $D = \left\{(x,y)|0 \le y \le 1, 0 \le x \le \sqrt{1-y}\right\}$,$f(x,y) = \cos\left(\frac{y}{1+x}\right)$

ז. $D = \{(x,y)|x^2 + y^2 \le 1\}$,$f(x,y) = x^2 + y^2$

ח. $D = \{(x,y)|x^2 + y^2 \le 1, y \ge 0\}$,$f(x,y) = 1$

ט. $D = \{(x,y)|x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$,$f(x,y) = xy$

פתרונות לתרגילים

1. מצאו את כל הפתרונות לכל אחת מן המשוואות הבאות:

א. $z^5 = 1$

הסבר כללי:

על מנת להעביר את המספר $a + bi$ לצורה קוטבית $a + bi = rcis(\theta)$ נבצע את החישובים הבאים:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

אם $a > 0$ אז $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

אם $a < 0$ אז $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 180°$

אם $a = 0, b > 0$ אז $\theta = 90°$

אם $a = 0, b < 0$ אז $\theta = -90°$

הסבר כללי:

על מנת למצוא את כל הפתרונות למשוואה מהצורה $z^n = a + bi$, עבור מספר מרוכב $a + bi \neq 0$

נעביר את המספר $a + bi$ לצורתו הקוטבית $a + bi = rcis(\theta)$

ישנם n פתרונות שונים למשוואה $z^n = rcis(\theta)$ המתקבלים ע"י הצבת $k = 0,1,2, \dots, n-1$ בנוסחא

$$z_k = \sqrt[n]{r}cis\left(\frac{\theta + k \cdot 360°}{n}\right)$$

פתרון השאלה:

$$1 = cis(0°)$$

$$z_k = \sqrt[5]{1}cis\left(\frac{0° + k \cdot 360°}{5}\right)$$

אנחנו מקבלים חמישה פתרונות ע"י הצבה של $k = 0,1,2,3,4$

$$\mathrm{z}_0 = cis(0°), z_1 = cis(72°), z_2 = cis(144°), z_3 = cis(216°), z_4 = cis(288°)$$

ב. $(1+i)z^4 = 1-i$

פתרון השאלה:

ראשית נכפול את שני האגפים בצמוד המרוכב של $1+i$, הוא המקדם של z^4

$$(1+i)z^4 = 1-i \quad /\cdot 1-i$$

$$(1-i)(1+i)z^4 = (1-i)^2$$

$$2z^4 = -2i$$

$$z^4 = -i = cis(-90°)$$

ולכן ארבעת הפתרונות מתקבלים ע"י הצבת $k = 0,1,2,3$ בנוסחא הבאה:

$$z_k = \sqrt[4]{1}cis\left(\frac{-90° + k\cdot 360°}{4}\right)$$

ג. $z^3 + 1 = cis\ (60°)$

פתרון השאלה:

ממבט ראשון, צורת המשוואה לא נראית מוכרת לנו. אבל ע"י העברת אגף נקבל

$$z^3 = cis(60°) - 1$$

כל שנותר לנו הוא לפשט את המספר באגף הימני, ולמצוא את הצורה הקוטבית שלו

$$cis(60°) - 1 = \cos(60°) + i\cdot\sin(60°) - 1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - 1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

כיוון ש $a = -\frac{1}{2} < 0$ הזוית הינה

$$\theta = \arctan\left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}\right) + 180° = -60° + 180° = 120°$$

כלומר אנחנו צריכים לפתור את המשוואה

$$z^3 = cis(120°)$$

ולכן ישנם 3 פתרונות שונים המתקבלים ע"י הצבת $k = 0,1,2$ בנוסחא

$$z_k = \sqrt[3]{1} cis\left(\frac{120° + k \cdot 360°}{3}\right)$$

ד. $z^3 = 2z$

פתרון השאלה:

נעביר אגף ונוציא גורם משותף

$$z(z^2 - 2) = 0$$

ולכן או ש $z = 0$ או ש $z^2 - 2 = 0$

לכן שלושת הפתרונות הם

$$0, \pm\sqrt{2}$$

שימו לב: המספרים הממשיים הם חלק משדה המרוכבים, בתרגיל זה לא נדרשנו להשתמש בכלים הייחודיים לשדה המרוכבים.

ה. $z^3 = (1+i)^{10} + (1-i)^{10}$

הסבר כללי:

על מנת לחשב חזקה של מספר מרוכב, נוח בדר"כ לעבור לצורתו הקוטבית ולהשתמש בכלל דה-מואבר:

$$(a + bi)^n = \left(rcis(\theta)\right)^n = r^n cis(n\theta)$$

פתרון השאלה:

$$(1 + i)^{10} = \left(\sqrt{2} cis(45°)\right)^{10} = 2^5 cis(450°) = 2^5 cis(90°) = 2^5 i$$

$$(1 - i)^{10} = \left(\sqrt{2} cis(-45°)\right)^{10} = 2^5 cis(-450°) = 2^5 cis(-90°) = 2^5(-i)$$

ולכן ביחד

$$(1 + i)^{10} + (1 - i)^{10} = 2^5 i - 2^5 i = 0$$

למשוואה $z^3 = 0$ ישנו פתרון יחיד $z = 0$

2. מצאו את הזויות בין זוגות הוקטורים הבאים:

א. $\vec{v} = (3,3), \vec{u} = (0,-2)$

הסבר כללי:

בהנתן זוג וקטורים $\vec{u}, \vec{w}$

אם הזוית ביניהם היא θ ואורכיהם הם $|\vec{u}|, |\vec{w}|$ אזי

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = |\vec{u}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\theta)$$

ואם שני הוקטורים שונים מאפס אפשר לחשב את הזוית על ידי הנוסחא

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{w}|}\right)$$

פתרון השאלה:

$$\theta = \arccos\left(\frac{(3,3) \cdot (0,-2)}{\sqrt{3^2 + 3^2}\sqrt{0^2 + (-2)^2}}\right) = \arccos\left(\frac{3 \cdot 0 + 3 \cdot (-2)}{2\sqrt{18}}\right) = \arccos\left(\frac{-6}{6\sqrt{2}}\right) = 135°$$

ב. $\vec{v} = (1,2,3), \vec{u} = (-1,-1,1)$

פתרון השאלה:

נשים לב כי

$$(1,2,3) \cdot (-1,-1,1) = 0$$

ולכן הוקטורים מאונכים, כלומר הזוית ביניהם היא $90°$

ג. $\vec{v} = (3,0,4), \vec{u} = (1, \sqrt{26}, 3)$

$$\theta = \arccos\left(\frac{(3,0,4) \cdot (1, \sqrt{26}, 3)}{\sqrt{3^2 + 4^2}\sqrt{1^2 + 26 + 3^2}}\right) = \arccos\left(\frac{15}{5 \cdot 6}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = 60°$$

3. בכל סעיף, קבעו האם קיים מישור העובר בראשית הצירים ובין שלושת הנקודות הנתונות:

א. $(1,2,3), (1,-2,0), (-1,6,3)$

הסבר כללי:

משוואת מישור במרחב התלת מימדי היא משוואה מהצורה $Ax + By + Cz = D$

על מנת שהמישור יעבור בראשית הצירים, הנקודה $(0,0,0)$ צריכה לקיים את המשוואה, ולכן $D = 0$

לכן נציב את שלושת הנקודות במשוואה $Ax + By + Cz = 0$

ונקבל שלוש משוואות בשלושת הנעלמים A, B, C, ונראה האם יש משוואת מישור כזו

פתרון השאלה:

אנחנו מחפשים משוואת מישור מהצורה $Ax + By + Cz = 0$, כאשר המקדמים מקיימים את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} A + 2B + 3C = 0 \\ A - 2B = 0 \\ -A + 6B + 3C = 0 \end{cases}$$

מדובר במערכת משוואות הומוגנית, נדרג קנונית את המטריצה המתאימה כיוון שאנחנו מעוניינים בפתרונות

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3+R_1]{R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -3 \\ 0 & 8 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{R_2}{-4}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 8 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-8R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שימו לב: לא בקשנו מאיתנו פתרון כללי, אלא האם קיים מישור כלשהו.

למשל, אם נציב במשתנה החופשי $C = 4$ נקבל את הפתרון

$$A = -\frac{3}{2}C = -6$$

$$B = -\frac{3}{4}C = -3$$

כלומר

$$-6x - 3y + 4z = 0$$

הוא מישור שעובר בראשית הצירים ובשלושת הנקודות הנתונות.

ב. $(0,2,3),(1,2,3),(0,0,3)$

פתרון השאלה:

בדומה לתרגיל קודם, אנחנו מחפשים מישור מהצורה $Ax+By+Cz=0$ העובר בשלושת הנקודות

כלומר אנחנו מחפשים מקדמים A,B,C המקיימים את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} 3C=0 \\ A+2B+3C=0 \\ 2B+3C=0 \end{cases}$$

נדרג את המטריצה המתאימה

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

כאן אנחנו עוצרים. מדוע?

אנחנו רואים שיש פתרון יחיד למערכת ההומוגנית, כלומר הפתרון היחיד הינו $A=B=C=0$

אבל לא ייתכן שבמשוואת מישור כל הקבועים שווים אפס (הרי אז מדובר במשוואה $0=0$), ולכן <u>אין</u> מישור העובר בין שלושת הנקודות ובראשית הצירים.

הערה כללית:

בסעיף הראשון גילינו שהוקטור השלישי נוצר ע"י שני הראשונים. כיוון שאנחנו מסתכלים על נקודה כוקטור היוצא מראשית הצירים ומגיע אליה, ניתן להבין כי שלושת הוקטורים נמצאים באותו מישור היוצא מראשית הצירים.

בסעיף השני, שלושת הוקטורים היו בלתי תלויים ולכן הם יוצרים יחד מרחב תלת מימדי. לכן אם שלושתם היו על אותו המישור יחד עם ראשית הצירים, כל צירוף שלהם היה נותר באותו המישור.

4. בכל סעיף מצאו את כל ערכי הפרמטרים עבורם הוקטורים ת"ל:

הסבר כללי:

על מנת לבדוק אם וקטורים ת"ל (תלויים לינארית) נשים אותם בעמודות מטריצה ונדרג אותה. אם יש איבר פותח בכל עמודה בצורה המדורגת הוקטורים בת"ל (בלתי תלויים לינארית) ואחרת הם ת"ל.

בשאלה עם פרמטר, עלינו לוודא שהאיברים שנראים לנו כפותחים הם אכן שונים מאפס וייתכן שנצטרך לחלק למקרים שונים של הפרמטרים.

א. $(a,1,1),(1,a,1),(1,1,a)$

פתרון השאלה:

נשים את הוקטורים בעמודות מטריצה ונדרג

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - aR_1]{R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & -a^2-a+2 \end{pmatrix}$$

כעת $a-1=0$ אם ורק אם $a=1$

וכן $-a^2-a+2=0$ אם ורק אם $a=1$ או $a=-2$

לכן, אם $a\neq 1,-2$ יש לנו מטריצה מדורגת עם איבר פותח בכל עמודה ושלושת הוקטורים בת"ל.

נציב $a=1$ ונקבל שיש איבר פותח רק בעמודה הראשונה ולכן הוקטורים במקרה זה ת"ל.

נציב $a=-2$ ונקבל שיש איברים פותחים רק בשתי העמודות הראשונות, ולכן גם במקרה זה הוקטורים ת"ל.

ב. $(1,2,3),(-2,-4,-6),(a,b,c)$

נשים את הוקטורים בעמודות מטריצה ונדרג

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 2 & -4 & b \\ 3 & -6 & c \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - 3R_1]{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 0 & 0 & b-2a \\ 0 & 0 & c-3a \end{pmatrix}$$

אנחנו רואים שבכל מקרה אין איבר פותח בעמודה השנייה, ולכן הוקטורים ת"ל.

שימו לב: למעשה רואים שהוקטור השני הוא מכפלה בסקלר של הוקטור הראשון, ובוודאי שהוא מיותר ויש תלות לינארית.

ג. $(1,0,1),(-1,-1,-2),(1,a,2)$

נשים את הוקטורים בעמודות מטריצה ונדרג

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & a\\ 1 & -2 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-R_1}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & a\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-R_2}\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & -1 & a\\ 0 & 0 & 1-a\end{pmatrix}$$

אם $a \neq 1$ יש איבר פותח בכל עמודה והוקטורים בת"ל

אם $a = 1$ אין איבר פותח בעמודה האחרונה והוקטורים ת"ל

5. קבעו באילו תנאים על הפרמטרים a,b,c מתקיים כי הוקטור (a,b,c) נמצא במישור העובר בראשית הצירים ובשתי הנקודות $(1,0,1),(0,-1,2)$

הסבר כללי:

שני וקטורי הכיוון היוצאים מראשית הצירים אל הנקודות הנתונות מייצרים מישור העובר בראשית הצירים ובשתי הנקודות.

וקטור יהיה במישור זה אם ורק אם ניתן ליצור אותו ע"י צירוף שני וקטורי הכיוון.

פתרון השאלה:

אנחנו שואלים באילו תנאים על a,b,c קיימים קבועים t,s כך ש

$$(a,b,c)=t(1,0,1)+s(0,-1,2)$$

כלומר אנחנו בודקים מתי אפשר להגיע לנקודה (a,b,c) באמצעות הכיוונים $(1,0,1),(0,-1,2)$

נפשט את המשוואה ונקבל

$$(a,b,c)=(t,-s,t+2s)$$

ואנחנו שואלים מתי <u>יש פתרון</u> עבור המשתנים t,s למערכת המשוואות

$$\begin{cases} t=a\\ -s=b\\ t+2s=c\end{cases}$$

נדרג את המטריצה

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & a\\ 0 & -1 & b\\ 1 & 2 & c\end{array}\right)\xrightarrow{R_3-R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & a\\ 0 & -1 & b\\ 0 & 2 & c-a\end{array}\right)\xrightarrow{R_3+2R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & a\\ 0 & -1 & b\\ 0 & 0 & c-a+2b\end{array}\right)$$

אם $c-a+2b\neq 0$ נקבל שורת סתירה, ולכן לא יהיו קבועים t,s כאלה ולכן הוקטור אינו במישור.

סה"כ הוקטור נמצא במישור אם ורק אם $c-a+2b=0$ (במקרה זה אנחנו מקבלים מטריצה מדורגת עם פתרון יחיד)

6. מצאו בסיס לישר החיתוך בין המישור $x+y+z=0$ למישור $2x-y-z=0$

אנחנו מחפשים בסיס לקבוצת הפתרונות למערכת ההומוגנית

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$$

נדרג קנונית את המטריצה המתאימה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{R_2}{-3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

נציב פרמטרים במשתנים החופשיים

$$z=t$$

ולכן

$$x=0$$

$$y=-t$$

והפתרון הכללי הוא

$$(0,-t,t)=t(0,-1,1)$$

כלומר הבסיס לישר החיתוך הוא $\{(0,-1,1)\}$

7. עבור אילו ערכי a שלושת המישורים הבאים עוברים דרך אותו ישר?

$x+y+z=0$, $y+az=1$, $x+2y+2z=a^2$

נחפש את כמות הפתרונות למערכת המשוואות של שלושת המשוואות הללו, אלה הנקודות המשותפות לשלושת המישורים

נדרג את המטריצה המתאימה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 2 & a^2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & 1 & a^2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & a^2-1 \end{array}\right)$$

כעת, אם $a \neq 1$ יש למערכת פתרון יחיד, כלומר המשותף לשלושת המישורים הוא נק' יחידה ולא ישר.

נציב $a = 1$ ונקבל

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

זו מטריצה מדורגת ללא שורת סתירה ועם משתנה חופשי, לכן יש אינסוף פתרונות ולכן יש ישר המשותף לשלושת המישורים.

8. מצאו בסיס ומימד לגרעין ולתמונה של ההעתקות הבאות:

הסבר כללי:

הגרעין הוא מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית המתאימה למטריצה המייצגת של ההעתקה.

התמונה היא מרחב העמודות של המטריצה המייצגת של ההעתקה.

לכן על מנת למצוא את הגרעין נדרג את המטריצה המייצגת קנונית ונמצא את הפתרון הכללי.

על מנת למצוא את התמונה נדרג את המטריצה וניקח את העמודות מהמטריצה המקורית במקומות בהם יש איברים פותחים במטריצה המדורגת.

הסבר כללי:

המטריצה המייצגת את ההעתקה $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ היא בגודל $m \times n$

כלומר כמות <u>העמודות</u> במטריצה המייצגת היא ככמות הקואורדינטות של <u>התחום</u>

כמות <u>השורות</u> במטריצה המייצגת היא ככמות הקואורדינטות של <u>הטווח</u>

כל עמודה במטריצה המייצגת מכילה את המקדמים של משתנה אחד מהתחום.

א. $T(x, y, z) = (x + y, z - x)$

נמצא את המטריצה המייצגת

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

על מנת למצוא את הגרעין, נדרג קנונית

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2+R_1}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1-R_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

הגרעין הוא מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית המתאימה, לכן נמצא את הפתרון הכללי

נציב פרמטרים במשתנים החופשיים

$$z=t$$

ולכן

$$x=t$$

$$y=-t$$

והפתרון הכללי הוא

$$(t,-t,t)=t(1,-1,1)$$

ולכן הבסיס לגרעין הוא $\{(1,-1,1)\}$ ומימדו הוא 1

זכרו: המימד הוא מספר הוקטורים בבסיס, כלומר כמות הכיוונים שיוצרים את המרחב. הגרעין במקרה זה הוא ישר.

כמו כן, בצורה המדורגת יש איברים פותחים <u>בשתי העמודות הראשונות</u> לכן שתי העמודות הראשונות <u>מהמטריצה המקורית</u> מהוות בסיס לתמונה, והמימד של התמונה הוא 2

$$\{(1,-1),(1,0)\}$$

ב. $T(x,y,z)=(x+4y+7z,2x+5y+8z,3x+6y+9z)$

המטריצה המייצגת היא

$$[T]=\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$$

נדרג אותה קנונית

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 2 & 5 & 8\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 0 & -3 & -6\\ 0 & -6 & -12\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-2R_2}\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 0 & -3 & -6\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{R_2}{-3}}\begin{pmatrix}1 & 4 & 7\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1-4R_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

נציב פרמטרים במשתנים החופשיים

$$z=t$$

ולכן

$$x = t$$

$$y = -2t$$

והפתרון הכללי הוא

$$(t, -2t, t) = t(1, -2, 1)$$

לכן הבסיס לגרעין הוא $\{(1, -2, 1)\}$ ומימדו הוא 1

כמו כן, כיוון שבצורה המדורגת יש איברים פותחים בשתי העמודות הראשונות, הבסיס לתמונה הוא שתי העמודות הראשונות מהמטריצה המקורית ומימד התמונה הוא 2. הבסיס לתמונה:

$$\{(1,2,3), (4,5,6)\}$$

ג. ההעתקה T שהמטריצה המייצגת שלה היא $[T] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

נדרג קנונית את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{R_2}{-3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

הפתרון הכללי כמו שחישבנו בתרגיל קודם עבור מטריצה זו בדיוק הוא

$$(0, -t, t) = t(0, -1, 1)$$

ולכן הבסיס לגרעין הוא $\{(0, -1, 1)\}$ ומימד הגרעין הוא אחד.

כמו כן, כיוון שבצורה המדורגת יש איברים פותחים בשתי העמודות הראשונות, הבסיס לתמונה הוא שתי העמודות הראשונות מהמטריצה המקורית ומימד התמונה הוא 2. הבסיס לתמונה:

$$\{(1,2), (1,-1)\}$$

ד. ההעתקה T שמקיימת כי $T(1,0) = (1, -2)$ וכן $T(0,1) = (-2, 4)$

הסבר כללי:

עמודות המטריצה המייצגת הם התמונות של איברי הבסיס הסטנדרטי.

כלומר, אם נפעיל את ההעתקה על הוקטורים ... $(1,0,\dots,0), (0,1,0,\dots,0)$ ונשים בעמודות, נקבל בדיוק את $[T]$

פתרון השאלה:

נשים את התמונות של $(1,0),(0,1)$ בעמודות ונקבל את המטריצה המייצגת

$$[T]=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$$

נדרג את המטריצה קנונית

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2+2R_1}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

נציב פרמטרים במשתנים החופשיים

$$y=t$$

$$x=2t$$

הפתרון הכללי הוא

$$(2t,t)=t(2,1)$$

ולכן הבסיס לגרעין הוא $\{(2,1)\}$ ומימדו הוא 1

כמו כן, יש איבר פותח בעמודה הראשונה, ולכן הבסיס לתמונה הוא העמודה הראשונה מהמטריצה המקורית ומימד התמונה הוא 1. הבסיס לתמונה הוא $\{(1,-2)\}$

9. מצאו לכל ערכי הפרמטרים האם למערכת המשוואות יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרון כלל

א. $\begin{cases} x+y+z=0\\ y+az=1\\ x+2y+2z=a^2\end{cases}$

נדרג את המטריצה המתאימה

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & a & 1\\ 1 & 2 & 2 & a^2\end{array}\right)\xrightarrow{R_3-R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & a & 1\\ 0 & 1 & 1 & a^2\end{array}\right)\xrightarrow{R_3-R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & a & 1\\ 0 & 0 & 1-a & a^2-1\end{array}\right)$$

כאשר $a\neq 1$ המטריצה מדורגת, ללא שורת סתירה, כל המשתנים תלויים ולכן יש פתרון יחיד.

כאשר $a=1$ נציב אותו

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

קיבלנו מטריצה מדורגת, ללא שורת סתירה, יש משתנה חופשי ולכן יש אינסוף פתרונות.

ב. המערכת האי הומוגנית המתאימה למטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & a \\ 0 & -1 & | & b \\ 1 & 2 & | & c \end{pmatrix}$

נדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & a \\ 0 & -1 & | & b \\ 1 & 2 & | & c \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & a \\ 0 & -1 & | & b \\ 0 & 2 & | & c-a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & a \\ 0 & -1 & | & b \\ 0 & 0 & | & c-a+2b \end{pmatrix}$$

כאשר $c - a + 2b \neq 0$ יש לנו שורת סתירה ולכן אין פתרון.

כאשר $c - a + 2b = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & a \\ 0 & -1 & | & b \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

יש לנו מטריצה מדורגת, ללא שורת סתירה, כל המשתנים תלויים, ולכן יש פתרון יחיד.

ג. המערכת ההומוגנית המתאימה למטריצה $\begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 2 & -4 & b \\ 3 & -6 & c \end{pmatrix}$

נדרג את המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 2 & -4 & b \\ 3 & -6 & c \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - 3R_1]{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & a \\ 0 & 0 & b-2a \\ 0 & 0 & c-3a \end{pmatrix}$$

כיוון שמדובר במערכת הומוגנית לא תתכן שורת סתירה.

בכל מקרה יש לפחות משתנה חופשי אחד, כיוון שאין איבר פותח בעמודה השנייה.

לכן יש אינסוף פתרונות בכל מקרה.

10. מצאו את הפתרונות הכלליים למערכות המשוואות הבאות

א. $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$

נדרג קנונית את המטריצה המתאימה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{R_2}{-3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

z משתנה חופשי כיוון שאין איבר פותח בעמודה שלו.

נציב $z=t$.

נביט במשוואות המתאימות למטריצה המדורגת

$$x=0$$

$$y+z=0$$

ולכן נסיק כי $x=0$ וכן $y=-z=-t$

ולכן הפתרון הכללי הוא

$$(0,-t,t)=t(0,-1,1)$$

ב. $\begin{cases} x-y+z=1 \\ y+z=2 \end{cases}$

נדרג קנונית את המטריצה המתאימה:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & | & 3 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}$$

נציב פרמטר במשתנה החופשי $z=t$ ונביט במשוואות המתאימות למטריצה המדורגת

$$x+2z=3$$

$$y+z=2$$

ולכן

$$x=3-2t$$

$$y=2-t$$

והפתרון הכללי הוא

$$(3-2t,2-t,t)=(3,2,0)+t(-2,-1,1)$$

ג. המערכת ההומוגנית המתאימה למטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$

נדרג קנונית את המטריצה המתאימה

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{R_2}{-3}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1-4R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נציב פרמטרים במשתנים החופשיים $z=t$

נביט במשוואות המתאימות לצורה המדורגת

$$x - z = 0$$

$$y + 2z = 0$$

ולכן נקבל את הפתרון הכללי

$$(t, -2t, t) = t(1, -2, 1)$$

11. קבעו לכל אחת מן המטריצות הבאות אם היא הפיכה, ואם כן מצאו את ההופכית שלה

א. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{R_2}{-2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

לכן המטריצה הפיכה וההופכית שלה היא

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ב. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{R_3 - 3R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{R_2}{-1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

לכן המטריצה הפיכה וההופכית שלה היא

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

ג. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1+R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{R_3}{-3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{R_2-2R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \xrightarrow{-R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right)$$

לכן המטריצה הפיכה וההופכית שלה היא

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

ד. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

כיוון שקיבלנו שורת אפסים בצורה מדורגת של המטריצה המקורית היא אינה הפיכה.

12. הביעו את הפתרונות למערכות המשוואות הבאות באמצעות הפרמטרים a, b, c

הסבר כללי:

כל מערכת משוואות ניתן להביע בצורה

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

כאשר A מטריצת המקדמים ו$\vec{b}$ וקטור הקבועים.

כאשר A הפיכה, למערכת יש פתרון יחיד והוא $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

א. $\begin{cases} x+2y=a \\ 3x+4y=b \end{cases}$

זו המערכת

$$A\vec{x}=\vec{b}$$

כאשר

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

$$\vec{b}=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$$

אנחנו יודעים שמדובר במטריצה הפיכה מסעיפים קודמים, והפתרון הוא

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=A^{-1}\vec{b}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2a+b\\ \frac{3}{2}a-\frac{1}{2}b\end{pmatrix}$$

ב. $\begin{cases} x+y+z=a \\ -y+2z=b \\ 2x+y+z=c \end{cases}$

זו המערכת

$$A\vec{x}=\vec{b}$$

כאשר

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\vec{b}=\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}$$

אנחנו יודעים שהמטריצה הפיכה מסעיפים קודמים, והפתרון הוא

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=A^{-1}\vec{b}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-a+c\\ \frac{4a-b-2c}{3}\\ \frac{2a+b-c}{3}\end{pmatrix}$$

13. לכסנו את המטריצות הבאות. כלומר, מצאו מטריצות P, D כך שP הפיכה, D אלכסונית, וכן $D = P^{-1}AP$

הסבר כללי:

נמצא את הפולינום האופייני, הערכים העצמיים הן המספרים שמאפסים אותו

$$|A - xI| = 0$$

לכל ערך עצמי λ נמצא וקטורים עצמיים - בסיס למרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית הבאה

$$N(A - \lambda I)$$

אם כמות הוקטורים העצמיים שמצאנו בבסיסים שווה לגודל המטריצה הריבועית – המטריצה לכסינה.

הוקטורים העצמיים שמצאנו הם עמודות המטריצה P.

הערכים העצמיים שמצאנו (באותו סדר כמו הוקטורים העצמיים) הם איברי האלכסון של המטריצה האלכסונית D.

א. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

$$|A - xI| = \left|\begin{pmatrix} -x & 1 \\ -2 & 3-x \end{pmatrix}\right| = -x(3-x) - 1 \cdot (-2) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) = 0$$

לכן הע"ע הם $\lambda = 1,2$

עבור $\lambda = 1$

$$N(A - I) = N\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

נדרג את המטריצה ונקבל את צורתה הקנונית

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

המשתנה השני חופשי, נציב בו פרמטר t ונקבל את הפתרון הכללי

$$(t, t) = t(1,1)$$

כלומר מצאנו ו"ע $(1,1)$ המתאים לע"ע $\lambda = 1$

עבור $\lambda = 2$

$$N(A - 2I) = N\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

נדרג את המטריצה ונקבל את צורתה הקנונית

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

המשתנה השני חופשי, נציב בו פרמטר t ונקבל את הפתרון הכללי

$$\left(\frac{1}{2}t, t\right) = t\left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

כלומר מצאנו ו"ע $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ המתאים לע"ע $\lambda = 2$

סה"כ מצאנו כי

$$D = P^{-1}AP$$

כאשר

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ב. $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -3-x & -4 \\ 2 & 3-x \end{vmatrix} = (-3-x)(3-x) - (-4)\cdot 2 = x^2 - 9 + 8 = x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$$

עבור $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(-t, t) = t(-1,1)$$

עבור $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(-2t, t) = t(-2,1)$$

ולכן

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

14. עבור כל אחת מהמטריצות בשאלה קודמת, חשבו את A^n כאשר $n \in \mathbb{N}$ פרמטר.

הסבר כללי: בהנתן לכסון של מטריצה

$$D = P^{-1}AP$$

נובע כי

$$A = PDP^{-1}$$

ולכן

$$A^n = (PDP^{-1})^n = PDP^{-1}PDP^{-1} \cdots PDP^{-1} = PD^nP^{-1}$$

כאשר העלאה בחזקה של מטריצה אלכסונית שווה להעלאה בחזקה של האיברים על האלכסון

סעיף א'

עבור $P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ נחשב את ההופכית

$$\left(\begin{matrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right) \to \left(\begin{matrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{matrix}\right) \to \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{matrix}\right) \to \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{matrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2^n}{2} \\ 1 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2^n & -1+2^n \\ 2-2^{n+1} & -1+2^{n+1} \end{pmatrix}$$

סעיף ב'

עבור $P = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ נחשב את ההופכית

$$\left(\begin{matrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right) \to \left(\begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right) \to \left(\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right) \to \left(\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{matrix}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{matrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 2 & 3\end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1^n & 0\\ 0 & (-1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -2\cdot(-1)^n\\ 1 & (-1)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-1+2(-1)^n & -2+2\cdot(-1)^n\\ 1-(-1)^n & 2-(-1)^n\end{pmatrix}$$

15. קבעו לכל ערך של הפרמטר a אם המטריצות הבאות לכסינות

א. $\begin{pmatrix}a & a^2\\ 0 & a\end{pmatrix}$

נחשב את הע"ע

$$\begin{vmatrix}a-x & a^2\\ 0 & a-x\end{vmatrix} = (a-x)^2 = 0$$

כלומר הע"ע היחיד הוא $\lambda = a$.

נחפש את הו"ע המתאימים לע"ע זה:

$$N(A-aI) = N\begin{pmatrix}0 & a^2\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

כעת, אם $a = 0$ זו מטריצת האפס, בה שני המשתנים חופשיים והפתרון הכללי הוא

$$(t,s) = t(1,0) + s(0,1)$$

וכיוון שמצאנו שני ו"ע בבסיס, המטריצה לכסינה.

שימו לב – אם נפקח את העיניים נראה כי כאשר $a = 0$ המטריצה היא מטריצת האפס ולכן אלכסונית ובוודאי לכסינה.

מצד שני, אם $a \neq 0$ אזי הצורה הקנונית של המטריצה היא

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

המשתנה השני הוא תלוי, והמשתנה הראשון הוא חופשי והפתרון הכללי הוא

$$(t,0) = t(1,0)$$

כלומר יש לנו רק ו"ע אחד בבסיס ולא שניים, והמטריצה <u>אינה לכסינה</u>.

ב. $\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a-x & a \\ 0 & a^2-x \end{vmatrix} = (a-x)(a^2-x) = 0$$

לכן הע"ע הם $\lambda = a, a^2$

כעת, אם $a \neq a^2$ יש שני ע"ע שונים, לכל אחד מהם יש ו"ע ולכן המטריצה לכסינה.

נבדוק את המקרים בהם $a = a^2$, כלומר $a = 0,1$

אם $a = 0$ שוב אנחנו מקבלים את מטריצת האפס והיא לכסינה.

אם $a = 1$, נחפש את הו"ע המתאימים לע"ע $\lambda = 1$

$$N(A - 1 \cdot I) = N\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הפתרון הכללי הוא

$$(t, 0) = t(1,0)$$

יש ו"ע יחיד בבסיס, ולכן המטריצה אינה לכסינה במקרה זה.

ג. $\begin{pmatrix} a-a^2 & a^2 \\ a-2a^2 & 2a^2 \end{pmatrix}$

נחשב את הע"ע בעזרת הפולינום האופייני

$$\begin{vmatrix} a-a^2-x & a^2 \\ a-2a^2 & 2a^2-x \end{vmatrix} = (a-a^2-x)(2a^2-x) - a^2(a-2a^2) = x^2 - (a^2+a)x + a^3 = 0$$

נמצא את השורשים של המשוואה הריבועית

$$\lambda_{1,2} = \frac{a^2 + a \pm \sqrt{(a^2+a)^2 - 4a^3}}{2} = \frac{a^2 + a \pm \sqrt{a^4 - 2a^3 + a^2}}{2} = \frac{a^2 + a \pm \sqrt{(a^2-a)^2}}{2} =$$

$$= \frac{a^2 + a \pm a^2 - a}{2} = a^2, a$$

לכן, שוב, אם $a \neq a^2$ יש שני ע"ע שונים, לכל אחד מהם יש ו"ע ולכן המטריצה לכסינה.

כמו כן, שוב אם $a = 0$ מקבלים את מטריצת האפס והיא לכסינה.

אם $a = 1$ נחפש את הו"ע

$$N(A - 1 \cdot I) = N\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

הפתרון הכללי הוא

$$(t,t)=t(1,1)$$

יש לנו רק ו"ע יחיד בבסיס, ולכן המטריצה אינה לכסינה.

16. קבעו האם הפונקציות הבאות רציפות בנקודה $(0,0)$

הסבר כללי: פונקציה רציפה בנקודה אם הגבול בנקודה שווה לערך בנקודה, כלומר

$$f(0,0)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

א. $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right|\leq\left|\frac{x^3}{x^2}\right|=|x|\to 0$$

ולכן

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$$

והפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$

ב. $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leq\left|\frac{x^2y}{x^2}\right|=|y|\to 0$$

ולכן גם פונקציה זו רציפה בנקודה.

ג. $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^3+xy^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$\lim_{t\to 0} f(t,t)=\lim_{t\to 0}\frac{t^3}{t^3+t^3}=\frac{1}{2}$$

לכן

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\neq 0=f(0,0)$$

והפונקציה אינה רציפה בנקודה.

ד. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$$\left|\frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}\right|\leq\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|+\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right|\leq\left|\frac{x^2y}{x^2}\right|+\left|\frac{xy^2}{y^2}\right|=|y|+|x|\to 0$$

והפונקציה אכן רציפה בנקודה.

17. בכל אחד מן הסעיפים, מצאו את משוואת המישור המשיק לפונקציה הנתונה $f(x,y)$ בנקודה הנתונה C

הסבר כללי:

משוואת המישור המשיק לגרף הפונקציה $f(x,y)$ בנקודה (x_0,y_0) היא המשוואה מהצורה

$$z=f_x(x_0,y_0)\cdot x+f_y(x_0,y_0)\cdot y+D$$

כך שהמישור עובר דרך הנקודה (x_0,y_0,z_0) כאשר $z_0=f(x_0,y_0)$

א. $f(x,y)=x^2+3xy+xy^2$, $C=(-1,1)$

נחשב את הנגזרות החלקיות

$$f_x(x,y)=2x+3y+y^2$$

$$f_y(x,y)=3x+2xy$$

הנגזרות בחלקיות בנקודה הנתונה הן

$$f_x(-1,1)=-2+3+1=2$$

$$f_y(-1,1)=-3-2=-5$$

ולכן המישור המשיק בנקודה הוא מהצורה

$$z=2x-5y+D$$

אנחנו רוצים שהמישור יעבור בנקודה

$$(x_0,y_0,z_0)=\big(-1,1,f(-1,1)\big)=(-1,1,-3)$$

ולכן

$$-3=-2-5+D$$

$$D=4$$

ולכן סה"כ המישור המשיק הוא

$$z = 2x - 5y + 4$$

ב. $C = (1,1)$,$f(x,y) = xe^{xy}$

$$f_x(x,y) = e^{xy} + xye^{xy}, \qquad f_x(1,1) = 2e$$

$$f_y(x,y) = x^2e^{xy}, \quad f_y(1,1) = e$$

$$z = 2ex + ey + D$$

$$(x_0, y_0, z_0) = (1,1,e)$$

$$e = 2e + e + D$$

$$D = -2e$$

סה"כ המישור המשיק בנקודה הוא

$$z = 2ex + ey - 2e$$

ג. $C = (0,0)$,$f(x,y) = x^3y + \sin(xy^2)$

$$f_x(x,y) = 3x^2y + y^2\cos(xy^2)\,, \qquad f_x(0,0) = 0$$

$$f_y(x,y) = x^3 + 2xy\cos(xy^2), \quad f_y(0,0) = 0$$

$$z = 0 \cdot x + 0 \cdot y + D$$

$$(x_0, y_0, z_0) = \big(0,0,f(0,0)\big) = (0,0,0)$$

$$0 = 0 + 0 + D$$

סה"כ המישור המשיק הוא

$$z = 0$$

18. בכל אחד מן הסעיפים, מצאו את הנקודות הקריטיות (בהן הגרדיאנט מתאפס) וסווגו אותן (מינ', מקס' או אוכף)

א. $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 6y^2$

ראשית נחפש את הנקודות הקריטיות, כלומר הנקודות בהן הגרדיאנט מתאפס, כלומר הנקודות בהן שתי הנגזרות החלקיות מתאפסות

$$f_x = 3x^2 + 6x = 0$$

$$f_y = 3y^2 - 12y = 0$$

כלומר צ"ל ש

$$x(x+2) = 0$$

$$y(y-4) = 0$$

סה"כ מצאנו 4 נקודות בהן שתי הנגזרות מתאפסות

$$(0,0), (0,4), (-2,0), (-2,4)$$

כעת צריך לבדוק אם מדובר באוכף או בקיצון ומאיזה סוג

$$\Delta(x,y) = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$$

$$f_{xx} = 6x + 6, \qquad f_{yy} = 6y - 12, \qquad f_{xy} = 0$$

$$\Delta(x,y) = (6x+6)(6y-12)$$

צריך להציב כל אחת מהנקודות

$$\Delta(0,0) = -6 \cdot 12 < 0$$

לכן $(0,0)$ היא אוכף

$$\Delta(0,4) > 0$$

לכן $(0,4)$ קיצון. כיוון ש $f_{xx}(0,4) > 0$ מדובר במיני' מקומי

$$\Delta(-2,0) > 0$$

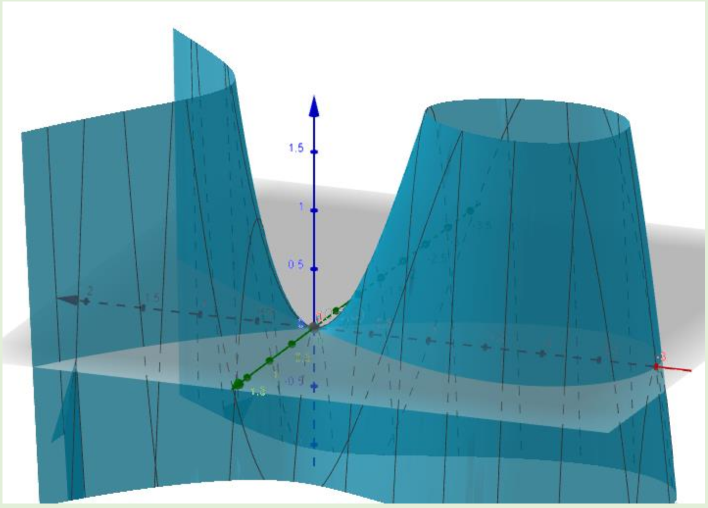
לכן $(-2,0)$ קיצון. כיוון ש $f_{xx}(-2,0) < 0$ מדובר במקס' מקומי

$$\Delta(-2,4) < 0$$

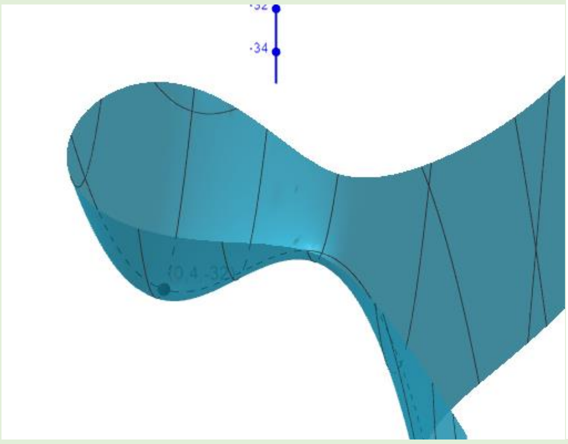
ולכן $(-2,4)$ אוכף

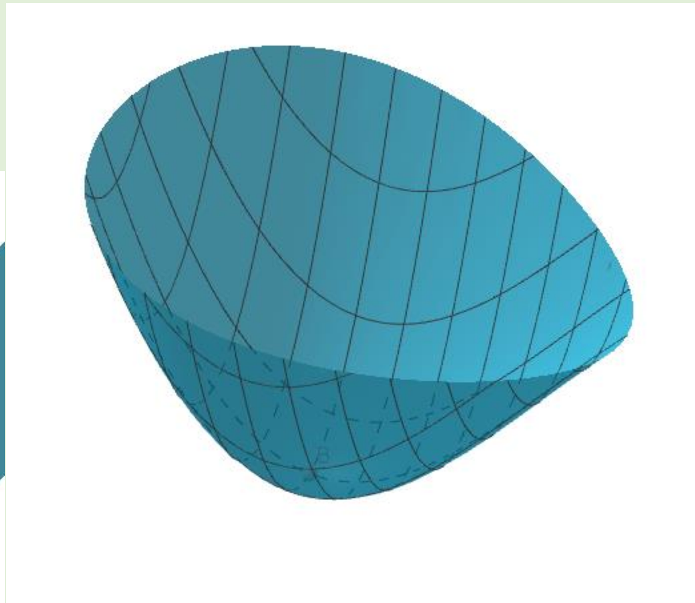
ציורים:

$(0,0)$

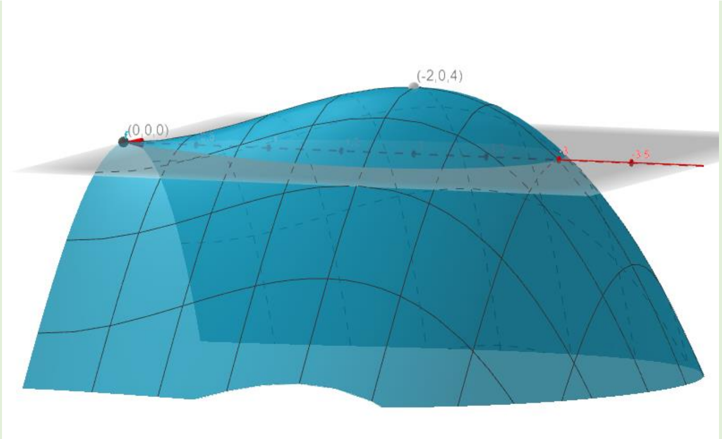


בנקודה $(0,4)$

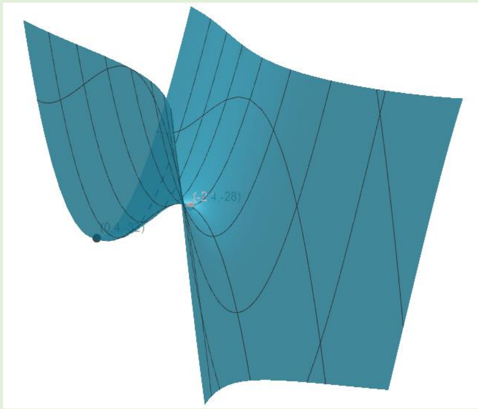




בנקודה $(-2,0)$



בנקודה $(-2,4)$



ב. $f(x,y) = 2x^2y - y^2 + x^4 + 8x$

נמצאו את הנקודות בהן הגרדיאנט מתאפס:

$$f_x = 0$$

$$f_y = 0$$

במקרה שלנו

$$f_x = 4xy + 4x^3 + 8 = 0$$

$$f_y = 2x^2 - 2y = 0$$

נבודד את y מהמשוואה השנייה ונציב במשוואה העליונה

$$8x^3 = -8$$

$$x = -1$$

$$y = 1$$

נחשב את Δ

$$\Delta = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$$

$$f_{xx} = 4y + 12x^2$$

$$f_{yy} = -2$$

$$f_{xy} = 4x$$

$$\Delta(-1,1) = 16 \cdot (-2) - f_{xy}^2(-1,1) < 0$$

לכן מדובר בנקודת אוכף.

ג. $f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y$

$$f_x = 2x + 2y = 0$$

$$f_y = 2x + 2 = 0$$

מהמשוואה השנייה $x = -1$ ולכן מהמשוואה הראשונה $y = 1$

$$f_{xx} = 2, f_{xy} = 2, f_{yy} = 0$$

לכן סה"כ

$$\Delta(-1,1) = 2 \cdot 0 - 2^2 < 0$$

ולכן $(-1,1)$ היא נקודת אוכף.

19. תהי פונקציה $f(x,y) = x^2y + x$

א. מצאו נקודה בה המישור המשיק לפונקציה הוא $z = 5x + y - 4$

משוואת המישור המשיק בנקודה (a,b) היא מהצורה

$$z = f_x(a,b)x + f_y(a,b)y + C$$

נחפש נקודה (a,b) בה

$$f_x = 5, \qquad f_y = 1$$

$$f_x = 2xy + 1 = 5$$

$$f_y = x^2 = 1$$

מהמשוואה השנייה $x = \pm 1$

אם $x = 1$ אז מהמשוואה הראשונה

$$2y = 4$$

$$y = 2$$

נותר רק לוודא שהמישור עובר דרך גרף הפונקציה בנקודה $(1,2)$

הנקודה על גרף הפונקציה היא

$$\left(1,2,f(1,2)\right) = (1,2,3)$$

אכן המישור $z = 5x + y - 4$ עובר דרך הנקודה $(1,2,3)$ וסה"כ זה המישור המשיק בנקודה זו

ב. מצאו נקודה בה המישור המשיק לפונקציה הוא $2z - 10x - 2y = 8$

ראשית נחלק את משוואת המישור ב2 ונעביר אגף על מנת לקבל

$$z = 5x + y + 4$$

זו הצורה הסטנדרטית שאנחנו מכירים, ואנחנו שוב מחפשים נקודה בה $f_x = 5, f_y = 1$.

משוואה המישור הזו אינה עוברת דרך הנקודה $(1,2,3)$ ולכן ננסה הפעם להציב $x = -1$.

מהמשוואה הראשונה נקבל כי $-2y = 4$ ולכן $y = -2$

הנקודה על גרף הפונקציה היא

$$\left(-1,-2,f(1,-2)\right) = (-1,-2,-3)$$

והיא אכן מקיימת את משוואת המישור $z = 5x + y + 4$

20. בכל אחד מן הסעיפים הבאים, מצאו את הערך המקסימלי והערך המינימלי של הפונקציה $f(x,y)$ בתחום D

הסבר כללי:

בנקודת קיצון בפנים התחום הגרדיאנט מתאפס, כלומר $f_x(x,y) = f_y(x,y) = 0$.

לכן ראשית נחפש נקודות פנימיות בהן שתי הנגזרות מתאפסות.

בנקודת קיצון בקצה התחום המתואר ע"י משוואה מהצורה $g(x,y) = 0$ קיים λ כך שמתקיימות משוואות כופלי לגראנז'

$$f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y)$$

$$f_y(x,y) = \lambda g_y(x,y)$$

$$g(x,y) = 0$$

לכן נחפש שלישיות (x_0, y_0, λ_0) המקיימות של שלושת המשוואות, וכל שלישיה כזו תורמת את הנקודה החשודה (x_0, y_0)

לבסוף נציב את כל הנקודות החשודות (הפנימיות ועל השפה) בפונקציה, ונראה מה הערך הגבוה ביותר שהפונקציה מגיעה אליו, ומה הנמוך ביותר.

א. $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + y^2$, $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$

ראשית נחפש נקודות חשודות פנימיות

$$f_x = x = 0$$

$$f_y = 2y = 0$$

הנקודה הפנימית החשודה היא $(0,0)$.

כעת נחשב נקודות חשודות על השפה $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ באמצעות משוואות כופלי לגראנז'

$$\begin{cases} x = \lambda 2x \\ 2y = \lambda 2y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

מהמשוואה השנייה $2y(1-\lambda) = 0$ ולכן $y = 0$ או $\lambda = 1$

אם $y = 0$ אז $x = \pm 1$ ומהמשוואה הראשונה $\lambda = \frac{1}{2}$.

סה"כ קיבלנו זוג נקודות חשודות על השפה $(\pm 1, 0)$

כעת, אם $\lambda = 1$ מהמשוואה הראשונה $x = 0$ ולכן מהמשוואה השלישית $y = \pm 1$

וקיבלנו זוג נקודות חשודות נוספות $(0, \pm 1)$.

עכשיו נציב את כל הנקודות החשודות:

$$f(0,0) = 0$$

$$f(\pm 1, 0) = \frac{1}{2}$$

$$f(0, \pm 1) = 1$$

לכן הערך המינימלי הוא 0 והערך המקסימלי הוא 1

ב. $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$,$f(x,y)=\frac{x^2(y+1)}{2}$

נחפש נקודות חשודות בפנים התחום, ונקודות חשודות על השפה.

בפנים התחום אנחנו מחפשים נקודות בהן הגרדיאנט מתאפס

$$f_x=0$$

$$f_y=0$$

$$f_x=x(y+1)=0$$

$$f_y=\frac{x^2}{2}=0$$

כל הנקודות בהן $x=0$ חשודות.

זה מחשיד כי באינסוף נקודות במעגל היחידה $x=0$.

בואו ננסה ולא נפחד

$$f(0,y)=0$$

אמנם קיבלנו אינסוף נקודות חשודות, אך הגובה בכולן זהה, ואין בעייה להציב.

(הערת אגב: גם אם היינו מקבלים ביטוי שתלוי בץ היינו יכולים למצוא את המקסימום והמינימום שלו)

כעת נעבור למצוא את הנקודות החשודות על השפה

$$g(x,y)=x^2+y^2-1=0$$

משוואות כופלי לגראנז'

$$f_x=\lambda g_x$$

$$f_y=\lambda g_y$$

$$g=0$$

נציב

$$x(y+1)=\lambda 2x$$

$$\frac{x^2}{2}=\lambda 2y$$

$$x^2+y^2=1$$

נוציא גורם משותף ולא נצמצם, גם בתיכון, כי צמצום לעיתים קרובות גורם לשכוח אם הביטוי הוא אפס או לא

$$x(y+1-2\lambda)=0$$

אם $x=0$ נציב בשלושת המשוואות

$$0=0$$

$$0=2\lambda y$$

$$y^2=1$$

לכן $y=\pm 1$ ולכן $\lambda=0$ מצאנו נקודות שמקיימות את כל המשוואות, הערך של λ לא באמת מעניין אותנו רק העובדה שהוא קיין ועובד בכל המשוואות במקביל.

$$(0,1),(0,-1)$$

(במקרה הזה, זה היה קצת מיותר כי ידענו שכל הנקודות בהן $x=0$ חשודות כי הגרדיאנט התאפס).

אחרת, אם $x\neq 0$, מתקיים כי

$$y+1-2\lambda=0$$

$$y=2\lambda-1$$

נציב במשוואה השנייה

$$\frac{x^2}{2}=2\lambda(2\lambda-1)$$

$$x^2=4\lambda(2\lambda-1)$$

נציב הכל במשוואה השלישית

$$4\lambda(2\lambda-1)+(2\lambda-1)^2=1$$

$$8\lambda^2-4\lambda+4\lambda^2-4\lambda+1=1$$

$$12\lambda^2-8\lambda=0$$

$$\lambda(12\lambda-8)=0$$

יש שני פתרונות

$$\lambda = 0, \frac{2}{3}$$

נקבל בהתאם כי

$$y = -1, \frac{1}{3}$$

מהמשוואה השלישית

אם $y = -1$ אז $x = 0$

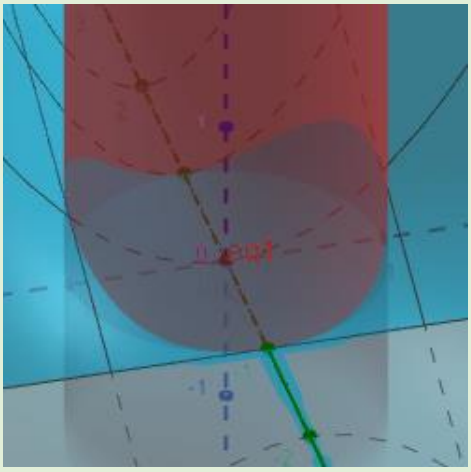
אם $y = \frac{1}{3}$ אז $x = \pm\sqrt{\frac{8}{9}}$

צריך לוודא שכל שלושת המשוואות מתקיימות ע"י הצבה של השלישיות.

נציב את כל החשודות בפונקציה, כאשר את הנקודות בהן $x = 0$ כבר הצבנו על מנת לא לפחד בהתחלה (והגובה שם הוא אפס)

$$f\left(\pm\sqrt{\frac{8}{9}}, \frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{8}{9}\left(\frac{1}{3}+1\right)}{2} = \frac{16}{27}$$

הערך המקסימלי של הפונקציה בתחום הוא $\frac{16}{27}$ והערך המינימלי הוא 0



ג. $D = \{x^2 + 2y^2 \leq 1\}$,$f(x,y) = x + y$

ראשית נחשב את הנגזרות החלקיות

$$f_x(x,y) = 1$$

לכן הנגזרות החלקיות לא יכולות להתאפס, ונעבור לחשב נקודות חשודות בפנים התחום באמצעות משוואות כופלי לגראנז'

$$g(x,y) = x^2 + 2y^2 - 1 = 0$$

נגזור ונציב במשוואות

$$f_x = \lambda g_x$$

$$f_y = \lambda g_y$$

$$g = 0$$

ונקבל

$$1 = \lambda 2x$$

$$1 = \lambda 4y$$

$$x^2 + 2y^2 - 1 = 0$$

משתי המשוואות הראשונות

$$2\lambda x = 4\lambda y$$

$$\lambda(2x - 4y) = 0$$

כעת לפי המשוואות הראשונות לא ייתכן כי $\lambda = 0$ ומכאן $2x = 4y$ כלומר $x = 2y$

נציב במשוואה השלישית ונקבל $4y^2 + 2y^2 = 1$ ולכן

$$y = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$$

קיבלנו זוג נקודות חשודות $\left(\pm\frac{2}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

נציב אותה בפונקציה

$$f\left(\pm\frac{2}{\sqrt{6}}, \pm\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = \pm\frac{3}{\sqrt{6}}$$

ולכן הערך המקסימלי הוא $\frac{3}{\sqrt{6}}$ והערך המינימלי הוא $-\frac{3}{\sqrt{6}}$

21. בכל אחד מן הסעיפים הבאים, חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_D f(x,y)dxdy$

א. $D=\{(x,y)|1\le x\le 2,1\le y\le 3\}$,$f(x,y)=x+y$

זהו תחום מלבני, מותר לנו לבחור את סדר המשתנים כרצוננו

$$\int_1^2\left(\int_1^3(x+y)dy\right)dx=\int_1^2\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)_1^3dx=\int_1^2\left(3x+\frac{9}{2}-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)dx=$$

$$=\int_1^2(2x+4)dx=(x^2+4x)_1^2=4+8-(1+4)=7$$

ב. $D=\{(x,y)|0\le x\le \pi,0\le y\le \pi\}$,$f(x,y)=xy\cos(x^2y)$

תחום מלבני, צריך לחשב את האינטגרל החוזר:

$$\int_0^\pi\left(\int_0^\pi(xy\cos(x^2y))dx\right)dy$$

ראשית נחשב את

$$\int_0^\pi(xy\cos(x^2y))dx=\begin{Bmatrix}t=x^2y\\ dt=2xydx\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi^2y}\cos(t)\,dt=\frac{1}{2}\sin(\pi^2y)$$

כעת

$$\int_0^\pi\left(\int_0^\pi(xy\cos(x^2y))dx\right)dy=\int_0^\pi\frac{1}{2}\sin(\pi^2y)\,dy=\left(\frac{-1}{2\pi^2}\cos(\pi^2y)\right)_0^\pi=-\frac{1}{2\pi^2}\cos(\pi^3)+\frac{1}{2\pi^2}$$

ג. $D=\{-1\le x\le 1,0\le y\le 1-x^2\}$,$f(x,y)=x+y$

זה תחום שאינו מלבני והאינטגרל שווה ל

$$\int_{-1}^1\left(\int_0^{1-x^2}(x+y)dy\right)dx=\int_{-1}^1\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)_0^{1-x^2}dx=\int_{-1}^1\left(x(1-x^2)+\frac{(1-x^2)^2}{2}\right)dx=$$

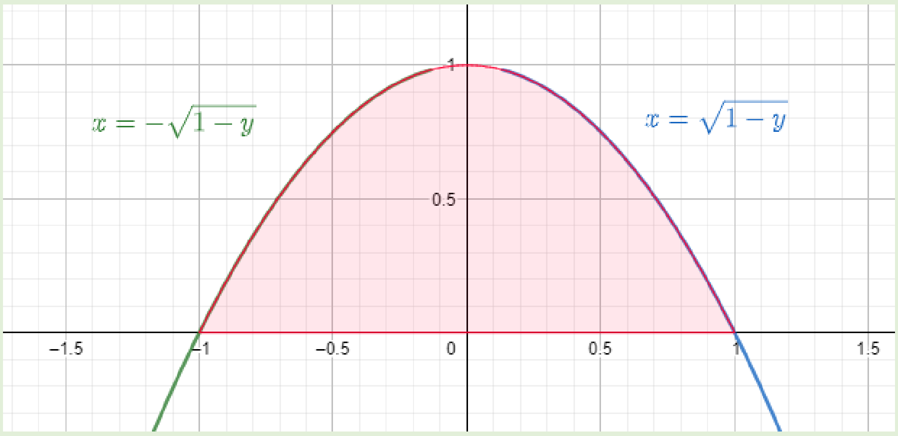
$$=\int_{-1}^1\left(\frac{x^4}{2}-x^3-x^2+x+\frac{1}{2}\right)dx=\left(\frac{x^5}{10}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\right)_{-1}^1=\frac{2}{10}-\frac{2}{3}+\frac{2}{2}=\frac{8}{15}$$

ד. $D=\{0\le y\le 1, -\sqrt{1-y}\le x\le \sqrt{1-y}\}$,$f(x,y)=x+y$

עלינו לחשב את האינטגרל הלא כל כך נעים הבא:

$$\int_0^1\left(\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}(x+y)dx\right)dy$$

נשים לב שהתחום D הוא מהצורה הבאה:



נבודד את y כפונקציה של x ונגלה כי אפשר להציג את התחום D באופן הפוך על מנת לשנות את סדר האינטגרציה:

$$D=\{-1\le x\le 1, 0\le y\le 1-x^2\}$$

אבל זה בדיוק האינטגרל מהסעיף הקודם, שכבר חישבנו!

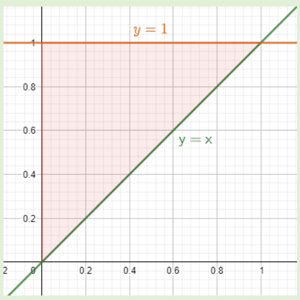
ה. $D=\{(x,y)|0\le x\le 1, x\le y\le 1\}$,$f(x,y)=\frac{1}{1+y^2}$

צריך לחשב את

$$\int_0^1\left(\int_x^1\frac{1}{1+y^2}dy\right)dx$$

לא בלתי פתיר, אבל שוב נעדיף להחליף את סדר האינטגרציה

התחום הנתון הוא



וניתן להציגו באופן הבא

$$D=\{0\le y\le 1,0\le x\le y\}$$

ולכן האינטגרל הוא

$$\int_0^1\left(\int_0^y \frac{1}{1+y^2}dx\right)dy=\int_0^1\left(\frac{x}{1+y^2}\right)_0^y dy=\int_0^1 \frac{y}{1+y^2}dy=\begin{Bmatrix} t=1+y^2 \\ dt=2ydy \end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{t}dt=\frac{1}{2}(\ln|t|)_1^2=\frac{\ln(2)}{2}$$

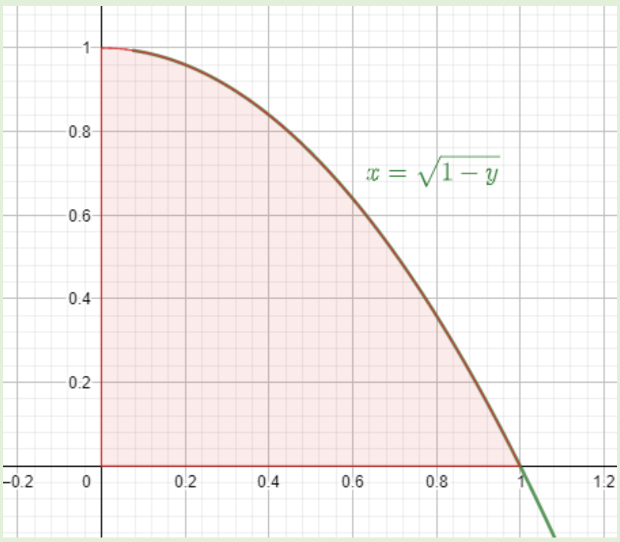
ו. $D=\left\{(x,y)|0\le y\le 1,0\le x\le \sqrt{1-y}\right\}$,$f(x,y)=\cos\left(\frac{y}{1+x}\right)$

נקבל אינטגרל

$$\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-y}} \cos\left(\frac{y}{1+x}\right)dx\right)dy$$

טוב כאן אנחנו כבר ממש חייבים להחליף את סדר האינטגרציה. קל לעשות אינטגרל על הביטוי הפנימי לפי y ואנחנו לא יודעים לחשב את האינטגרל עליו לפי x שנמצא במכנה.

התחום הוא



נבודד את y ונציג את התחום באופן הבא

$$D=\{0\le x\le 1,0\le y\le 1-x^2\}$$

נקבל את האינטגרל

$$\int_0^1\left(\int_0^{1-x^2} \cos\left(\frac{y}{1+x}\right)dy\right)dx$$

$$\int_0^{1-x^2} \cos\left(\frac{y}{1+x}\right) dy = \left((1+x)\sin\left(\frac{y}{1+x}\right)\right)_0^{1-x^2} = (1+x)\sin(1-x)$$

נחשב את הקדומה של פונקציה זו באמצעות אינטגרציה בחלקים

$$\int (1+x)\sin(1-x)\,dx = \left\{\begin{matrix} f' = \sin(1-x) & g = x+1 \\ f = \cos(1-x) & g' = 1 \end{matrix}\right\} = (x+1)\cos(1-x) - \int \cos(1-x)\,dx$$

$$= (x+1)\cos(1-x) + \sin(1-x)$$

וביחד

$$\int_0^1 \left(\int_0^{1-x^2} \cos\left(\frac{y}{1+x}\right) dy\right) dx = \int_0^1 (1+x)\sin(1-x)\,dx = ((x+1)\cos(1-x) + \sin(1-x))_0^1$$

$$= 2 - (\cos(1) + \sin(1))$$

ז. $f(x,y) = x^2 + y^2$, $D = \{(x,y)|x^2 + y^2 \le 1\}$

הסבר כללי:

מעבר לקואורדינטות קוטביות

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_S f\big(rcos(\theta), rsin(\theta)\big) \cdot r \cdot drd\theta$$

כאשר התחום S מתאר את התחום D בקואורדינטות r,θ המקיימות

$$x = rcos(\theta), y = rsin(\theta)$$

ולכן

$$x^2 + y^2 = r^2$$

כיוון שזה כל מעגל היחידה

$$0 \le r \le 1$$

$$0 \le \theta \le 2\pi$$

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r^2 \cdot rdr\right) d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{r^4}{4}\right)_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{r^4}{4}\right)_0^1 d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{4}(\theta)_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{4}$$

ח. $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \le 1, y \ge 0\}$,$f(x,y) = 1$

שוב נעבור לקואורדינטות קוטביות, הפעם התחום הוא רק החצי העליון של מעגל היחידה ולכן

$$0 \le r \le 1$$

$$0 \le \theta \le \pi$$

$$\iint_D 1dxdy = \int_0^{\pi}\left(\int_0^1 rdr\right)d\theta = \int_0^{\pi}\left(\frac{r^2}{2}\right)_0^1 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} d\theta = \frac{1}{2}(\theta)_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

ט. $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$,$f(x,y) = xy$

נעבור לקואורדינטות קוטביות, התחום הוא הרבע של מעגל היחידה ברביע הראשון ולכן

$$0 \le r \le 1$$

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

והאינטגרל הוא

$$\iint_D xydxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 rcos(\theta)rsin(\theta)rdr\right)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 r^3cos(\theta)sin(\theta)dr\right)d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{cos(\theta)sin(\theta)r^4}{4}\right)_0^1 d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{4}cos(\theta)sin(\theta)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{8}\cdot 2cos(\theta)sin(\theta)d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{8}\cdot \sin(2\theta)d\theta = \left(\frac{-1}{16}\cos(2\theta)\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}$$