דוגמה 1(הגדרת הגבול)

הוכח לפי ההגדרה האם קיים הגבול ל$f(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ בנקודה $(0,0)$, ואם כן חשב אותו.

פתרון

ננסה לחשב את הגבול. ניקח לדוגמה את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} f(x,y)=0$, ואז אם הגבול קיים אז הוא אפס!

נוכיח לפי ההגדרה שהגבול אכן אפס. יהי $\epsilon>0$, נניח $\|(x,y)-(0,0)\|<\delta$. נוכיח כי $|f(x,y)-0|<\epsilon$.

<u>הוכחה:</u>

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|=\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\frac{|x|\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$$

ולכן מספיק לבחור $\epsilon=\delta$

הערה

אם בודקים לפי ההגדרה ניתן לדרוש $\|x-p\|<\delta$ או $|x_1-p_1|<\delta$ וגם $|x_2-p_2|<$ δ(נגיד במקרה של נורמה 2)

סיכום לנושא גבולות

כדי להפריך קיום גבול נשתמש בשיטות הבאות:

(א) אם סכום חזקות המשתנים של כל מחובר שווה(נגיד ויש לנו פונקציה רציונלית) נשתמש בהצבה $x=ky$.
<u>למשל:</u> $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+2xy}$

(ב) בדרך כלל קל לחשב גבולות חוזרים. אם מקבלים שהגבולות קיימים ושונים אז ראינו שהגבול הכפול לא קיים.
<u>למשל:</u> $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$

(ג) כאשר אנו שואפים ל$(0,0)$ ודרגת החזקות במונה קטנה מאשר דרגת החזקות במכנה, אז הפונקציה שלנו בערך מוחלט שואפת לאינסוף.
<u>למשל:</u> $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$

כדי להוכיח שקיים גבול:

(א) שימוש במשפט הסנדוויץ'.

(ב) שימוש בשיטת ההצבה, דרכה מגיעים בד"כ ל(במקום $\mathbb{R}^2$)

(ג) לפי ההגדרה!

רציפות

נגדיר פונקציה $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$, $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$, תהיה רציפה בנקודה $p\in\Omega$ אם $p\in\lim\Omega$ (p נקודה מבודדת) או לחילופין נרשום $\boxed{\lim\limits_{x\to p} f(x)=f(p)}$

דוגמה 2

האם הפונקציה $f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ 0 & (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$ רציפה בנקודה $(0,0,0)$?

פתרון

ברור שפרט לנקודה $(0,0,0)$ הפונקציה רציפה כהרכבה של פונקציות אלמנטריות רציפות. נשתמש במשפט הסנדוויץ':

$$0\le\left|\frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}\right|=\frac{\left|x^3+y^3+z^3\right|}{x^2+y^2+z^2}\le\frac{\left|x^3\right|+\left|y^3\right|+\left|z^3\right|}{x^2+y^2+z}=\frac{|x|\,x^2+|y|\,y^2+|z|\,z^2}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\le\frac{|x|\left(x^2+y^2+z^2\right)+|y|\left(x^2+y^2+z^2\right)+|z|\left(x^2+y^2+z^2\right)}{x^2+y^2+z^2}=|x|+|y|+|z|\xrightarrow[(x,y,z)\to(0,0,0)]{}0$$

ע"פ משפט הסנדוויץ ברור כי $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}|f(x,y,z)|=0\Leftarrow\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x,y,z)=0$

עד כה ברור כי $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)}=f(0,0,0)=0$, משמע הפונקציה רציפה.

דוגמה 3

קבע האם הפונקציות רציפות

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)^{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

פתרון

במקרה הנ"ל נציב $t=x^2+y^2$. נקבל $\left(x^2+y^2\right)^{x^2+y^2}=t^t$ ולכן מספיק לחשב את הגבול

$$\lim_{t\to0}t^t=\lim_{t\to0}e^{\ln t^t}=\lim_{t\to0}e^{t\ln t}$$

מספיק לחשב את הגבול $\lim_{t\to 0}\frac{\ln t}{t^{-1}} = \lim_{t\to 0} t\ln t$. נעשה לופיטל: $\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}} = 0$ ולכן

$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2,y^2\right)^{x^2+y^2} = e^0 = 1$, משמע הפונקציה הנתונה רציפה.

דוגמה ב

קבע רציפות $f\left(x,y\right) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

פתרון

נראה שהגבול הנ"ל הוא אינסוף.

$$\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = \frac{x^2+y^2}{\left(x^2\right)^2+\left(y^2\right)^2} \geq \frac{x^2+y^2}{\left(x^2\right)^2+2x^2y^2+\left(y^2\right)^2} = \frac{x^2+y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{1}{x^2+y^2}\xrightarrow{(x,y)\to(0,0)}\infty$$

(כי $\lim_{(x,y)\to(0,0)} = \infty$)

דוגמה

מצא את הגבול עבור $\lim_{(x,y)\to\infty}\left(x^2+y^2\right)e^{-(x+y)}$. האם הפונקציה ההפיכה רציפה?

פתרון

נראה שהגבול הוא אפס. נשתמש במשפט הסנדוויץ

$$0 \leq \left(x^2+y^2\right)e^{-(x+y)} = \frac{x^2+y^2}{e^{x+y}} \leq \frac{x^2+2xy+y^2}{e^{(x+y)}} = \frac{\left(x+y\right)^2}{e^{(x+y)}}$$

נציב $t = x+y$. קל לראות ע"י לופיטל שהגבול הוא אפס, ולכן $\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} f\left(x,y\right) = 0$.

ברור כי f^{-1} אינה רציפה כי $0 \leftarrow \infty$

ב

חשב את הגבול $\lim_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}}\frac{x+y}{x^2-xy+y^2}$

פתרון

נראה ע"י משפט הסנדוויץ כי הגבול 0. נשתמש בנוסחת כפל מקוצר. ידוע שמתקיים $\left(x+y\right)^2 \geq 0$

$$x^2+2yx+y^2 \geq 0$$

באופן דומה מהנוסחה $(x-y)^2 \geq 0$ קל לראות ש$x^2+y^2 \geq 2xy$.
מהמשוואות הנ"ל נקבל כי $x^2+y^2 \geq 2(x-y)$. נסתכל על המונה:

$$x^2 - xy + y^2 \geq x^2 - |xy| + y^2 \geq |xy|$$

$$\frac{1}{x^2 - xy + y^2} \leq \frac{1}{|xy|}$$

נכפול ב$x+y$ $\Leftarrow$

$$0 \leq \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2} \leq \frac{x+y}{|x-y|} = \frac{x}{|xy|} + \frac{y}{|xy|}$$

$$= \frac{x}{|x|}\frac{1}{|y|} + \frac{y}{|y|}\frac{1}{|x|} = \frac{1}{|y|} + \frac{1}{|x|} \xrightarrow[(x,y)\to 0]{} 0$$

קיבלנו ע"פ משפט הסנדוויץ כי הגבול הוא אפס.