הגדרה שימושית

$D\subseteq\mathbb{C}$ הוא תחום פשוט קשר אם לכל $z\in D^c$ ולכל מסילה סגורה γ בD

$$\mathrm{Ind}_\gamma D=0$$

הגדרה

יהי $D\subseteq\mathbb{C}$ תחום פתוח, ותהי Γ שרשרת(של מסילות) בתוך D. אומרים שΓ הומולוגית לאפס בD אם לכל $z\in D^c$

$$\mathrm{Ind}_\Gamma\left(z\right)=0$$

משפט 4(משפט ונוסחת קושי המוכללים)

יהי $D\subseteq\mathbb{C}$ תחום פתוח, ותהי $f\in H\left(D\right)$. עוד נניח שΓ שרשרת הומולוגית לאפס בD. אזי

(א) לכל $z\in D\backslash\Gamma$

$$f\left(z\right)\mathrm{Ind}_\Gamma\left(z\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f\left(w\right)}{w-z}\mathrm{d}w$$

(ב)

$$\int_\Gamma f\left(w\right)\,\mathrm{d}w=0$$

הוכחה

עבור $D\times D$ $\left(z,w\right)\in$ נגדיר

$$g\left(z,w\right)=\begin{cases}\dfrac{f\left(w\right)-f\left(z\right)}{w-z} & w\neq z\\ f'\left(z\right) & w=z\end{cases}$$

נשים לב שלכל $w\in D$ מסויים הפונקציה $z\to g\left(z,w\right)$ אנליטית בD.

הסבר: לכל $D \ni z \neq w$, $g(z,w)$ נתונה ע"י הנוסחה הראשונה, והיא בוודאי אנליטית. יתר על כן

$$\lim_{z\to w} g(z,w) = \lim_{z\to w} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} = f'(z) = g(w,w) = g(z,z)$$

כיוון שיש גבול הסינגולריות ב$w = z$ סליקה, והוכחנו ש$g(z,w) \to z$ אנליטית בD.

בפרט, קיים $\frac{\partial}{\partial z} g(z,w)$ לכל (z,w) ב$D \times D$. כעת, עבור כל $z \in D$ נגדיר

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(z,w)\, \mathrm{d}w$$

...

עצם זה שהגבול קיים אומר ש$h \in H(D)$. כעת נגדיר

$$D_1 = \{z \in \mathbb{Z} | \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0\}$$

לפי הנתון, $D' \subset D$. לכל $z \in D_1$ נגדיר

$$h_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w$$

טענה: $h_1 \in H(D_1)$.

הוכחה:

$$h_1'(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{h_1(z+\Delta z)-h_1(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z-\Delta z}\mathrm{d}w - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w\right] =$$

$$= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(w)\left[\frac{\frac{1}{2-z-\Delta z}-\frac{1}{w-z}}{\Delta z}\right]\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{1}{(w-z)^2}\mathrm{d}w$$

עצם זה שהגבול קיים מראה ש$h_1(z)$ אנליטית בD_1.

לבסוף, נגדיר

$$\varphi(z) = \begin{cases} h(z) & z \in D \\ h_1(z) & z \in D_1 \end{cases}$$

צריך לבדוק שφ מוגדרת היטב. צריך להוכיח שאם $z \in D \cap D_1$, $h(z) = h_1(z)$.
ובכן: אם $z \in D \cap D_1$,

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma g(z,w)\,\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}\mathrm{d}w =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{w-z}\mathrm{d}w = h_1(z) - f(z)\,\mathrm{Ind}_{\Gamma}(z)$$

וכיוון ש$z \in D_1$, $\mathrm{Ind}_{\Gamma}(z) = 0$ ולכן $h(z) = h_1(z)$. נובע ש$\varphi(z)$ מוגדרת היטב, ולפי מה שהוכחנו עד כאן, φ אנליטית ב$D \cup D_1$, שמכיל את $\mathbb{C} = D \cup D^c$. ז.א. φ פונקציה שלימה.

טענה:

$$\lim_{z\to\infty}\varphi(z) = 0$$

הוכחה: עבור $|z|$ "גדול" $z \in D_1$, ולכן

$$\varphi(z) = h_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w \xrightarrow[z\to\infty]{} 0$$

(כי המכנה באינטגרל שואף ל∞ והמונה לא משתנה)

כיוון ש$\lim_{z\to\infty}\varphi(z) = 0$, $\varphi(z)$ חסומה ב$\mathbb{C}$. לפי ליוביל $\varphi(z) \equiv c$ וכיוון ש$\lim_{z\to\infty}\varphi(z) = 0$ בהכרח $c = 0$ ו$\varphi(z) \equiv 0$. בפרט, אם $z \in D \backslash \Gamma$,

$$0 = \varphi(z) = h(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} g(z,w)\ \mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(w)-f(z)}{w-z}\mathrm{d}w$$

ז.א.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z)}{w-z}\mathrm{d}w =$$

$$= f(z)\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{1}{w-z}\mathrm{d}w = f(z)\,\mathrm{Ind}_{\Gamma}(z)$$

והוכחנו את (א)!

בשביל להוכיח את (ב), נבחר $z \in D\backslash\Gamma$ כלשהו(מסוים), ונגדיר

$$k(w) = f(w)(w-z)$$

לפי (א),

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{k(w)}{w-z}\mathrm{d}w = k(z)\,\mathrm{Ind}_{\Gamma}(z)$$

אבל

$$\frac{k(w)}{w-z} = f(w)$$

ו

$$k(z) = f(z)(z-z) = 0$$

ולכן הנוסחה מ(א) אומרת

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f\left(w\right)\,\mathrm{d}w=0$$

והוכחנו את (ב)!

$\blacksquare$

תזכורת

$D\subset\mathbb{C}$ נקרא תחום פשוט קשר אם D פתוח ולכל $z\notin D$ ולכל מסילה סגורה γ בD $\mathrm{Ind}_{\gamma}\left(z\right)=0$.

(זו דרך מתמטית להגיד שאין חורים - כי אם היה חור היה אפשר להקיף אותו)

ז.א., כל γ סגורה בD הומולוגית לאפס בD.

מסקנה 1 למשפט

יהי $D\subset\mathbb{C}$ תחום פשוט קשר ותהי $f\in H\left(D\right)$.

אם γ מסילה סגורה בD אז

(א) לכל $z\in D\backslash\gamma$

$$f\left(z\right)\mathrm{Ind}_{\gamma}\left(z\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f\left(w\right)}{w-z}\mathrm{d}w$$

(ב)

$$\int_{\gamma}f\left(w\right)\,\mathrm{d}w=0$$

הוכחה

כיוון שγ הומולוגית לאפס בD, המסקנה היא מקרה פרטי של משפט 4.

$\blacksquare$

מסקנה 2

יהי $D \subset \mathbb{C}$ תחום החסום ע"י מסילת ז'ורדן γ, ונניח ש$f \in H\left(\overline{D}\right)$
אזי

(א)

$$\int_\gamma f\left(z\right)\,\mathrm{d}z = 0$$

(ב) לכל $z \in D$,

$$f\left(z\right) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f\left(w\right)}{w-z}\mathrm{d}w$$

(Ind לא מופיע כאן, כי זו מסילת ז'ורדן - האינדקס תמיד 1!)

הוכחה

הנתון $f \in H\left(D\right)$ בעצם אומר שיש תחום $D_1 \supset D$ כך ש$f \in H\left(D_1\right)$ ולה"כ[1] D_1 פשוט קשר. כעת $f \in H\left(D_1\right)$ וγ מסילה בD_1(שהוא פשוט קשר).
לפי מסקנה 1

$$\int_\gamma f\left(z\right)\,\mathrm{d}z = 0$$

יתר על כן נובע ממסקנה 1 שאם $z \in D$,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f\left(w\right)}{w-z}\mathrm{d}w = f\left(z\right)\mathrm{Ind}_\gamma\left(z\right) = f\left(z\right)$$

כי היות וγ מסילת ז'ורדן מכוונת נגד כיוון השעון לכל z "בתוך γ" - ז.א. לכל $z \in D$ - $\mathrm{Ind}_\gamma\left(z\right) = 0$.

מסקנה 3

יהי $D \subset \mathbb{C}$ תחום החסום ע"י מסילת ז'ורדן חיצונית γ_1 ומסילות ז'ורדן פנימיות $\gamma_2, \gamma_3, \ldots \gamma_n$.
אם $f \in H\left(\overline{D}\right)$ אז

$$\oint_{\gamma_1} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=2}^{n}\oint_{\gamma_k} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z$$

[1]ללא הגבלת הכלליות

הוכחה

הנתון ש$f \in H\left(\overline{D}\right)$ אומר שקיים תחום $D_1 \supset \overline{D}$. $\Gamma = \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 - \cdots - \gamma_n$ שרשרת הומולוגית לאפס בD_1 ו$f \in H\left(D_1\right)$ לפי משפט 4 סעיף 2

$$0 = \int_{\Gamma} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z = \oint_{\gamma_1} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z - \sum_{k=2}^{n} \oint f\left(z\right)\,\mathrm{d}z$$

נעביר אגף לקבל את התוצאה

$$\oint_{\gamma_1} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=2}^{n} \oint_{\gamma_k} f\left(z\right)\,\mathrm{d}z$$

■

הגדרה

טבעת(annulus) היא השטח בין שני מעגלים בעלי אותו מרכז.
בפרט נגדיר

$$A\left(z_0, r_1, r_2\right) = \left\{z \in \mathbb{C} | r_1 < |z - z_0| < r_2\right\}$$

כאן

$$0 \le r_1 < r_2 \le \infty$$

(כלומר מרשים $r_1 = 0$(עיגול מנוקב) ו$r_2 = \infty$(הטבעת אינה חסומה מבחוץ)

משפט 5

נניח ש$f\left(z\right)$ מוגדרת ואנליטית בסגור של הטבעת

$$A\left(0, r_1, r_2\right) = \left\{z \in \mathbb{C} | r_1 < |z| < r_2\right\} \qquad 0 < r_1 < r_2 < \infty$$

אזי לכל $z \in A\left(0, r_1, r_2\right)$, "טור לורן" הוא

$$f\left(z\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

הטור יחיד ומתכנס ממש בתת טבעות $A\left(0, s_1, s_2\right)$ כאשר $r_1 < s_1 < s_2 < r_2$.

רעיון ההוכחה

אם $z \in A(0, r_1, r_2)$ נוכל להסתכל על נוסחת קושי(סעיף א' של משפט 4) לומר

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|w|=r_2} \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w - \frac{1}{2\pi i}\oint_{|w|=r_1} \frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w = I_1 - I_2$$

כעת, בI_1 $|w| = r_2$ ו$|z| < r_2$ כי $z \in A(0, r_1, r_2)$. לכן $\left|\frac{z}{w}\right| < 1$. נובע שב$I_1$

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{w}\frac{1}{1 - {}^{z}\!/\!{}_{w}} = \frac{1}{w}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{w}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{w^{n+1}}$$

נובע ש

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|w|=r_2} f(w)\frac{1}{w-z}\mathrm{d}w =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|w|=r_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(w)}{w^{n+1}}z^n\,\mathrm{d}w$$

בודקים שעבור $z \in A(0, r_1, r_2)$ קבוע הטור שבאינטגרל מתכנס במ"ש במעגל $|w| = r_2$.
לכן

$$I_1 = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r_2}\frac{f(w)}{w^{n+1}}\mathrm{d}w\right]z^n = \sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$$

נעבור לI_2:

$$I_2 = -\oint_{|w|=r_1}\frac{f(w)}{w-z}\mathrm{d}w$$

בI_2 $|w| = r_1$, $|z| > r_1$ ולכן $\left|\frac{w}{z}\right| < 1$. נובע ש

$$\frac{1}{w-z} = \frac{1}{z}\frac{1}{\frac{w}{z} - 1} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{z^{n+1}}$$

לכן

$$2\pi i I_2 = -\oint_{|w|=r_1} f(w)\frac{1}{w-z}\,\mathrm{d}w =$$

$$= +\oint_{|w|=r_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(w)\,w^n}{z^{n+1}}\,\mathrm{d}w =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\oint_{|w|=r_1} f(w)\, w^n\, \mathrm{d}w\right]\frac{1}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{z^n}$$

בסיכום: אם

$$f \in H\left(A\left(0, r_1, r_2\right)\right)$$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

(וקיבלנו נוסחאות אינטגרליות ל"a_n" ול"b_n")
אנו משמיטים את שאר פרטי ההוכחה.

מסקנה(הכללה של משפט 5)

תהי $f(z)$ מוגדרת ואנליטית בטבעת $A(z_0, r_1, r_2)$ כאשר $0 \leq r_1 < r_2 \leq \infty$. אזי ב$A(z_0, r_1, r_2)$ f מתפתחת לטור לורן יחיד

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

הטור מתכנס במ"ש על כל תת־טבעת

$$A(z_0, s_1, s_2)$$

כאשר

$$r_1 < s_1 < s_2 < r_2$$

דוגמאות חישוב

1. הפונקציה $e^{1/z}$ אנליטית בטבעת $A(0,0,\infty) = \{z \in \mathbb{C} | z \neq 0\}$. נחשב את טור לורן של $e^{1/z}$ בטבעת זו:

תשובה: לכל $w \in \mathbb{C}$, $e^w = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{w^n}{n!}$. כעת נוכל לרשום $w = 1/z$. אם כן

$$e^{1/z} = e^w = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n\frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} =$$

$$= 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$$

זה טור בסגנון של לורן שמציג את $e^{1/z}$ לכל $z \neq 0$. כיוון שטור לורן הוא יחיד, הטור שלנו בהכרח טור לורן של $e^{1/z}$ בטבעת $A(0,0,\infty)$.

2. הפונקציה $f(z)=\frac{\sin z}{z^4}$ אנליטית בטבעת $\{z|z\neq 0\}=A(0,0,\infty)$. מצאו את טור לורן שלה בטבעת הנ"ל.

תשובה: לכל $z\in\mathbb{C}$,

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots$$

לכן אם $z\neq 0$

$$\frac{\sin 7}{z^4}=\frac{1}{z^3}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z}+\frac{z}{5!}-\frac{z^3}{7!}+\cdots$$

וזה כבר טור לורן של $\frac{\sin z}{z^4}$.

3. הכללה של דוגמה 2: נניח שלפונקציה $f(z)$ יש קוטב מסדר n בנקודה z_0. נפתח אותה לטור לורן בסביבה מנוקבת של z_0.

תשובה: כיוון שקיים לf קוטב מסדר n בz_0 יש פירוק

$$f(z)=(z-z_0)^{-n}g(z)$$

כאשר $g(z)$ אנליטית בסביבה שלימה של z_0, ו$g(z_0)\neq 0$. לכן g מתפתחת לטור טיילור

$$g(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k$$

לכן בסביבה מנוקבת של z_0

$$f(z)=(z-z_0)^{-n}g(z)=(z-z_0)^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^{k-n}=$$

$$=\frac{g(z_0)}{(z-z_0)^n}+\frac{g'(z_0)}{(z-z_0)^{n-1}}+\frac{g''(z_0)}{2!(z-z_0)^{n-2}}+\cdots+\frac{g^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!(z-z_0)}+\frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}+\frac{g^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!(z-z_0)}+\ldots$$

וזהו טור לורן!

בין היתר מצאנו ש:

- סביב קוטב מסדר n טור לורן תמיד מתחיל מחזקת $(-n)$.
- אם הייתה סינגולריות סליקה בz_0 אז לא הייתה ממש סינגולריות, ולא היו שום חזקות שליליות בטור לורן.
- מה נותר? בסביבת סינגולריות עיקרית יש תמיד ∞ חזרקות שליליות בטור לורן.

למה

נניח ש$f\left(z\right)$ מוגדרת ואנליטית בסביבה מנוקבת של z_0

$$S=\left\{ z\in\mathbb{C}|0<\left|z-z_0\right|<r\right\}$$

ונניח שלכל $z\in S$

$$f\left(z\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{\left(z-z_0\right)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(z-z_0\right)^n$$

כעת אם $0<\rho<r$

$$\oint_{C\left(z_0,\rho\right)}f\left(t\right)\,\mathrm{d}t=2\pi ib$$

הוכחה

על $C\left(z_0,\rho\right)$ הטור מתכנס במ"ש ואפשר לעשות אינטגרציה איבר איבר:

$$\oint_{C\left(z_0,\rho\right)}f\left(z\right)\,\mathrm{d}z=\sum_{n=1}^{\infty}\oint_{C\left(z_0,\rho\right)}\frac{b_n}{\left(z-z_0\right)^n}\,\mathrm{d}z+\sum_{n=0}^{\infty}\oint_{C\left(z_0,\rho\right)}a_n\left(z-z_0\right)^n\,\mathrm{d}z$$

בסכום השני כל אינטגרל שווה לאפס ע"פ משפט קושי כי $\left(z-z_0\right)^n$ ($n\geq-$) פונקציה שלימה.

בסכום הראשון לכל $n>1$ לפונקציה

$$\frac{b_n}{\left(z-z_0\right)^n}=b_n\left(z-z_0\right)^{-n}$$

יש פונקציה קדומה $b_n\dfrac{\left(z-z_0\right)^{-n+1}}{-n+1}$, אנליטית ב$C\left(z_0,\rho\right)$, ולכן האינטגרל מתאפס.

מכל זה נובע:

$$\oint_{C\left(z_0,\rho\right)}f\left(z\right)\,\mathrm{d}z=\oint_{C\left(z_0,\rho\right)}\frac{b_1}{z-z_0}\,\mathrm{d}z$$