

אלגברה לינארית 2 (88113) – בחינת סיום (מועד א') פרופ' רון עדין

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
 אין להשתמש בשום חומר עזר, כולל מחשבון.
 יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות, כל שאלה בעמוד נפרד. כל השאלות שוות משקל.
 ניתן לסמן עמודים כ"טיוטה".
 נא להסביר ולנמק בבירור את כל הפתרונות.

בהצלחה!

1.
 - א. הגדירו: מכפלה פנימית.
 - ב. נסחו והוכיחו את אי-שוויון קושי-שוורץ (כולל תנאי השוויון).

2.
 - א. הגדירו: דטרמיננטה של מטריצה.
 - ב. הוכיחו: (דטרמיננטה ונדרמונדה)
$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \quad (\forall n \geq 2)$$

3.
 - א. הוכיחו: אם למטריצות $A, B \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ יש אותו פולינום אופייני ואותו פולינום מינימלי, אז הן דומות זו לזו.
 - ב. תנו דוגמא של זוג מטריצות $A, B \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ עם אותו פולינום אופייני ואותו פולינום מינימלי, שאינן דומות זו לזו. נמקו.

4.

יהי $W = \text{span} \{(1, 0, -1), (1, 2, 3)\}$ תת-מרחב של $V = \mathbb{R}^3$.

 - א. מצאו בסיס אורתונורמלי $\{e_1, e_2\}$ עבור W (ביחס למכפלה הפנימית הרגילה).
 - ב. השלימו לבסיס אורתונורמלי $\{e_1, e_2, e_3\}$ עבור V כולו.
 - ג. נגדיר אופרטור לינארי $T: V \rightarrow V$ ע"י:

$$T(e_1) = e_2, \quad T(e_2) = e_1, \quad T(e_3) = -e_3$$
 מצאו את כל הערכים העצמיים והמרחבים העצמיים של T .

5.
 - א. הגדירו: אופרטור הרמיטי, אנטי-הרמיטי, אוניטרי, נורמלי.
 - ב. יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל \mathbb{R} , ויהי $T: V \rightarrow V$ אופרטור אנטי-הרמיטי. הוכיחו: לכל $v \in V$, $\langle T(v), v \rangle = 0$.
 - ג. יהי V מרחב מכפלה פנימית ממימד סופי מעל \mathbb{R} , ויהי $T: V \rightarrow V$ אופרטור לינארי המקיים $\langle T(v), v \rangle = 0$ לכל $v \in V$. הוכיחו: T אנטי-הרמיטי. (רמז: קחו $v = v_1 + v_2$ כאשר $v_1, v_2 \in V$)