אנליזה מודרנית תש"ף - תרגול 9

1 בינואר 2020

הגדרה: תהי $E\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה מדידה. לכל $x\in\mathbb{R}$ נגדיר את הצפיפות היחסית של E ב־x להיות

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{m\left(E\cap[x-\varepsilon,x+\varepsilon]\right)}{m\left([x-\varepsilon,x+\varepsilon]\right)}$$

אם הגבול קיים.

הגדרה: לעתים נאמר ש־x היא נקודת צפיפות של E אם הצפיפות היחסית של E ב־x היא 1. מושג זה בא להכליל את המושג של נקודת פנים בטופולוגיה.

דוגמה: נגדיר סדרת קטעים $\{I_n\}$ לפי $I_n=\left(2^{-(2n+1)},2^{-2n}\right)$ לכל n טבעי. אז

$$m\left(I_n\right)=2^{-2n}-2^{-(2n+1)}=2^{-(2n+1)}$$

נגדיר $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$. נרצה לחשב את הצפיפות היחסית של A בנקודה 0. נשים לב שלכל k מתקיים $A\cap\left(-2^{-2k},2^{-2k}\right)=\bigcup_{n=k}^{\infty}I_n$, ולכן

$$m\left(A\cap\left(-2^{-2k},2^{-2k}\right)\right)=m\left(\bigcup_{n=k}^{\infty}I_n\right)=\sum_{n=k}^{\infty}m\left(I_n\right)=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}}=\frac{4}{3}\frac{1}{2^{2k+1}}$$

(מ־σ־אדיטיביות, וחישבנו סכום של סדרה הנדסית). כעת, עבור חזקות זוגיות נקבל

$$\frac{m\left(A\cap\left(-2^{-2k},2^{-2k}\right)\right)}{m\left(\left(-2^{-2k},2^{-2k}\right)\right)}=\frac{4}{3}\frac{1}{2^{2k+1}}*\frac{2^{2k}}{2}=\frac{1}{3}$$

ועבור חזקות אי־זוגיות נקבל

$$\frac{m\left(A\cap\left(-2^{-(2k+1)},2^{-(2k+1)}\right)\right)}{m\left(\left(-2^{-(2k+1)},2^{-(2k+1)}\right)\right)}=\frac{4}{3}\frac{1}{2^{2k+3}}*\frac{2^{2k+1}}{2}=\frac{1}{6}$$

כלומר מצאנו שתי תת־סדרות בעלות גבולות שונים (כאשר $k\to\infty$), ולכן הגבול $\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{m(E\cap[-\varepsilon,\varepsilon])}{m([-\varepsilon,\varepsilon])}$ לא קיים, כלומר ל־A אין צפיפות יחסית ב־$x=0$.

דוגמה: נניח ש־E הוא ריבוע ב־$\mathbb{R}^2$, ויהי $x\in\mathbb{R}$. מהי הצפיפות היחסית של E ב־x? אם x נמצא בתוך הריבוע ולא בשפה, הצפיפות היחסית ב־x תהיה 1. אם x נמצא על צלע הריבוע אבל הוא לא קודקוד, הצפיפות היחסית ב־x תהיה $\frac{1}{2}$. אם x הוא אחד מקודקודי הריבוע, הצפיפות היחסית ב־x תהיה $\frac{1}{4}$. אחרת, הצפיפות היחסית ב־x תהיה 0. מומלץ לצייר ולראות!

משפט (משפט הצפיפות של לבג): תהי $E \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה מדידה כך ש־$m(E) > 0$. אז לכמעט כל $x \in E$ מתקיים

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{m(E \cap [x-\varepsilon, x+\varepsilon])}{m([x-\varepsilon, x+\varepsilon])} = 1$$

כלומר כמעט כל הנקודות של E הן נקודות צפיפות.

מסקנה: ממשפט הצפיפות של לבג נקבל גם שכמעט לכל $x \in E^c$, הצפיפות היחסית של E^c ב־x היא 0. לכן בכמעט כל $x \in \mathbb{R}$ יש צפיפות יחסית 0 או 1.

הערה: אם $m(E) = 0$, אז הצפיפות היחסית של E בכל נקודה היא 0, ואז המשפט מתקיים באופן כמעט ריק.

מסקנה: אם $m(E) > 0$, אז קיימת ב־E לפחות נקודת צפיפות אחת.

הערה: למעשה, הוכחנו גרסה זו של משפט הצפיפות בתרגול הקודם. תהי $E \in \mathbb{R}$ קבוצה מדידה לבג. הוכחנו שלכמעט כל $a \in E$ מתקיים

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{2h} \int_{a-h}^{a+h} \mathbb{1}_E dm = 1$$

אבל $m(E \cap [a-h, a+h]) = \int_{a-h}^{a+h} \mathbb{1}_E dm$, וכן $m([a-h, a+h]) = 2h$. כלומר לכמעט כל $a \in E$ יש צפיפות יחסית 1. זה בדיוק משפט הצפיפות של לבג.

משפט: תהי f פונקציה אינטגרבילית. אז לכמעט כל $x_0 \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{1}{2h} \int_{x_0-h}^{x_0+h} f dm = f(x_0)$$

זו גרסה של משפט הגזירה של לבג, והיא גוררת את משפט הצפיפות, עבור $f = \mathbb{1}_E$.

תרגיל: תהי $A \subseteq [0,1]$ מדידה. נניח שקיים $\alpha > 0$ כך שלכל קטע I מתקיים $\frac{m(A \cap I)}{m(I)} > \alpha$. הוכיחו כי $m(A) = 1$.

הוכחה: תחילה, מאדיטיביות המידה מתקיים

$$1 = \frac{m(I)}{m(I)} = \frac{m(A \cap I) + m(A^c \cap I)}{m(I)} = \frac{m(A \cap I)}{m(I)} + \frac{m(A^c \cap I)}{m(I)}$$

כעת לפי ההנחה $\frac{m(A^c \cap I)}{m(I)} < 1 - \alpha$ לכל קטע I. כדי להוכיח ש־$m(A) = 1$, מספיק להוכיח כי $m(A^c \cap [0,1]) = 0$. נניח בשלילה ש־ $m(A^c \cap [0,1]) > 0$. אז ממשפט הצפיפות של לבג, קיימת ל־$A^c \cap [0,1]$ נקודת צפיפות, כלומר יש $x_0 \in A^c \cap [0,1]$ כך ש־$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{m(A^c \cap [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon])}{m([x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon])} = 1$. נוכל לבחור ε קטן מספיק עבורו

$$1 - \frac{\alpha}{2} < \frac{m(A^c \cap [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon])}{m([x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon])} \leq 1$$

, ואז בפרט $\frac{m(A^c \cap [x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon])}{m([x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon])} > 1 - \alpha$, בסתירה.

תרגיל: לכל שתי קבוצות מדידות A,B נגדיר את הקבוצה $A+B=\{a+b\,|\,a\in A,\ b\in B\}$.
הוכיחו שאם A ו־B בעלות מידה חיובית, אז $A+B$ מכילה קטע.

סימון: נסמן $B\left(x,r\right)=\left(x-r,x+r\right)$.

הוכחה: $m\left(A\right)>0$ וכן $m\left(B\right)>0$, ולכן קיימת ל־A נקודת צפיפות a וקיימת ל־B נקודת צפיפות b. יהי $\varepsilon>0$. ממשפט הצפיפות של לבג, קיים $\delta_1>0$ עבורו $\frac{m(A^c\cap B(a,\delta_1))}{m(B(a,\delta_1))}<\varepsilon$ וכן קיים $\delta_2>0$ עבורו $\frac{m(B^c\cap B(b,\delta_2))}{m(B(b,\delta_2))}<\varepsilon$. ניקח $\delta=\min\left\{\delta_1,\delta_2\right\}$. נרצה להראות כי

$$B\left(a+b,\frac{\delta}{2}\right)\subseteq A+B$$

יהי $z\in B\left(a+b,\frac{\delta}{2}\right)$, ויהי $s\in B\left(a,\frac{\delta}{2}\right)$. אזי $z-s\in B\left(b,\delta\right)$. כדי להוכיח ש־$z\in A+B$, צריך למצוא s כך ש־$s\in A$ וגם $z-s\in B$. ובכן, נשים לב שמתקיים

$$m\left(\left\{s\in B\left(a,\frac{\delta}{2}\right)\,|\,s\notin A\right\}\right)=m\left(A^c\cap B\left(a,\frac{\delta}{2}\right)\right)<\varepsilon*m\left(B\left(a,\frac{\delta}{2}\right)\right)=\varepsilon\delta$$

וגם

$$m\left(\left\{z-s\in B\left(b,\delta\right)\,|\,z-s\notin B\right\}\right)=m\left(B^c\cap B\left(b,\delta\right)\right)<\varepsilon*m\left(B\left(b,\delta\right)\right)=2\varepsilon\delta$$

נוכל לבחור ε עבורו $\varepsilon\delta+2\varepsilon\delta=3\varepsilon\delta<\delta$, ולכן הקבוצה $\left\{s\in B\left(a,\frac{\delta}{2}\right)\,|\,s\in A,\ z-s\in B\right\}$ היא בעלת מידה חיובית (כי חיסרנו מ־$B\left(a,\frac{\delta}{2}\right)$, שהיא קבוצה ממידה δ, את שתי הקבוצות הנ"ל שמידתן יחדיו היא $3\varepsilon\delta$, ונותרנו עם הקבוצה המבוקשת). בפרט, קיים s כך ש־$s\in A$ וגם $z-s\in B$, ואז $z\in A+B$, וסיימנו כי $A+B$ מכילה את הקטע $B\left(a+b,\frac{\delta}{2}\right)$.