# מבני נתונים ואלגוריתמים - הרצאה 13

11 בדצמבר 2011

## תורת האינפורמציה

הגדרנו אנטרופיה עבור התפלגות $P$

$$H(x)=-\int P(x)\log(P(x))\,dx$$

אם יש לנו התפלגות שתלויה בשני משתנים נגדיר אנטרופיה משותפת:

$$H(x,\,y)=-\iint P(x,\,y)\log P(x,\,y)\,dxdy$$

אנטרופיה = אי וודאות, כלומר אנטרופיה 0 אומר וודאות מלאה ואנטרופיה מקסימלית היא אי וודאות מלאה.
נגדיר:

$$H(x\mid y)=-\iint P(x,\,y)\log P(x\mid y)\,dxdy$$

ניתן לכתוב

$$\begin{aligned}H(x) &= -E(\log P(x))\\ H(x,\,y) &= -E(\log P(x,\,y))\\ H(x\mid y) &= -E(\log P(x\mid y))\end{aligned}$$

דוגמה לשימוש ב$H(x\mid y)$:
נניח ש$x$ גובה ו$y$ משקל, אז הידיעה של המשקל מורידה את אי הוודאות של הגובה.

$$\begin{aligned}H(x\mid y) &= -\iint P(x,\,y)\log(P(x\mid y))\,dxdy\\ &= -\iint P(x,\,y)\log\left(\frac{P(x,\,y)}{P(y)}\right)dxdy\\ &\quad -\iint P(x,\,y)\log(P(x,\,y))\,dxdy+\iint P(x,\,y)\log P(y)\,dxdy\\ &= H(x,\,y)-H(y)\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו

$$\begin{aligned}H(x,\,y) &= H(x\mid y)+H(y)\\ &= H(y\mid x)+H(x)\end{aligned}$$

### דוגמה

דוגמה א': ניקח את הוקטורים:

$$\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

דוגמה ב': ניקח את הוקטורים

$$\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

בשתי הדוגמאות ההסתברויות הן:

$$\begin{pmatrix} x & -1 & 0 & 1 \\ P(x) & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y & -2 & 0 & 2 \\ P(y) & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

אזי

$$\begin{aligned} H(x) &= 3\cdot\left(-\frac{1}{3}\log\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \log 3 \\ H(y) &= 3\cdot\left(-\frac{1}{3}\log\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \log 3 \end{aligned}$$

כעת נעשה הסתברות משותפת לדוגמה א':

| | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| -2 | $\frac{1}{3}$ | 0 | 0 |
| 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 |
| 2 | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ |

לדוגמה ב':

| | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| -2 | $\frac{1}{6}$ | 0 | $\frac{1}{6}$ |
| 0 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | 0 |
| 2 | 0 | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

נחשב אנטרופיה - בדוגמה א':

$$H(x,\, y) = 3\cdot\left(-\frac{1}{3}\log\frac{1}{3}\right) = \log 3$$

בדוגמה ב':

$$H(x,\, y) = 6\cdot\left(-\frac{1}{6}\log\frac{1}{6}\right) = \log 6$$

כעת נחשב אנטרופיה מותנית - בדוגמה א':

$$H(y \mid x) = 0 = H(y,\, x) - H(x)$$

בדוגמה ב':

$$H(y \mid x) = \log 6 - \log 3 = \log 2$$

## הגדרה

נניח שיש לנו שני משתנים מקריים $x,\, y$. נסתכל על שתי התפלגויות:

$$\begin{gathered} P(x,\, y) \\ P(x)\cdot P(y) \end{gathered}$$

נסתכל על שני מקרים קיצוניים: אם $P(x,\, y) = P(x)\cdot P(y)$ אז נקבל שהם בלתי תלויים, כלומר לא משנה אם אני יודע מה $y$, אי הוודאות של $x$ תישאר אותו דבר.
המקרה הקיצוני השני הוא:

$$H(x \mid y) = 0$$

כלומר

$$P(x,\,y)=\begin{cases}P(x) & y=f(x)\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

נגדיר אינפורמציה:

$$\begin{aligned}I &= H(x)-H(x\mid y)\\ &= H(x)-[H(x,\,y)-H(y)]\\ &= H(x)+H(y)-H(x,\,y)\\ &= H(y)-H(y\mid x)\end{aligned}$$

במקרה הקיצוני השני, שבו $H(x\mid y)=0$ נקבל $I(x,\,y)=H(x)$.
במקרה השני, אם $H(x\mid y)=H(x)$ אז $I=0$.
האינפורמציה היא בעצם המדד של כמה הפסדנו בדחיסה שהיא lossy, כלומר דחיסה שבה מאבדים מידע. במקרה האידאלי הוא שהאינפורמציה שווה לאנטרופיה (ואז זה lossless).

## זרימה - שאלת הMinimal Cut

בהינתן גרף מכוון, לכל קשת יש משקל $c_i$, ובהינתן מקור (source) ומטרה (Sink) בגרף, מהו צירוף הקשתות בעל סכום משקלים מינימלי אותו ניתן להוריד כדי שלא יהיה מסלול בין המקור למטרה?

## הגדרה

בהינתן גרף מכוון בו לכל קשת יש משקל $c_i$, ובהינתן מקור (source) ומטרה (Sink) בגרף, נגדיר פונקציית זרימה $f(u,\,v)$ בין קדקד $u$ לקדקד $v$ כך שיתקיים:

$$f(u,\,v)\leq c(u,\,v)$$

כלומר הזרימה בין $u$ ל$v$ היא לכל היותר משקל הקשת בין $u$ ל$v$.
בנוסף, מתקיים:

$$\begin{aligned}\sum_i f(u_i,\,v) &= \sum_j f(u,\,w_j)\\ f(u,\,v) &\geq 0\end{aligned}$$

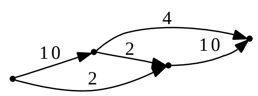
## בעיית הMaximal Flow

מה כמות הזרימה המקסימלית שניתן להוציא מהSource ולהביא לSink?
(נניח שהתנאי השני על $f$ נכון פרט למקור ולמטרה, כי למקור לא נכנס שום דבר ומהמטרה לא יוצא שום דבר).

למעשה, שתי הבעיות זהות, ולכן נקראות:

## בעיית Min-Cut, Max-Flow

למשל, אם הגרף הוא כזה:




אז האפשרות המקסימלית להעביר היא 8, וגם האפשרות הכי זולה לחתוך את הזרימה היא 8 - חיתוך של 4,2,2.

## הגדרה - קיבולת שיורית

נגדיר קיבולת שיורית (כלומר קיבולת שלא השתמשנו בה בזרימה $f$):

$$\tilde{c}\left(u,\,v\right)=c\left(u,\,v\right)-f\left(u,\,v\right)$$

נגדיר גם:

$$\tilde{c}\left(v,\,u\right)=f\left(u,\,v\right)$$

---

**אלגוריתם 1** אלגוריתם למציאת Min-Cut, Max-Flow

---

כל עוד יש מסלול בו מינימום הקיבולת השיורית גדול מ-0, תוסיף ל$f$ לאורך המסלול את $\min\left(\tilde{c}\right)$ לאורך המסלול.

---