

פיסיקה למתמטיקאים

תרגיל 3: שימור אנרגיה

1. גוף נע בשדה $\mathbf{F} = (x^3 + xy^2, y^3 + yx^2)$ במישור $x - y$.

(א) הוכיחו כי השדה משמר (רמז: השתמשו במשפט סטוקס)

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

(ב) מצאו את הפוטנציאל $U(x, y)$

(ג) חשבו בצורה מפורשת את העבודה הדרושה להעביר את הגוף מהראשית לנקודה $(2, 1)$ לאורך מסלול המחבר תחילה את הראשית עם הנקודה $(2, 0)$ לאורך ציר x ולאחר מכן את הנקודה $(2, 0)$ עם הנקודה $(2, 1)$ לאורך ציר y

(ד) חזרו על החישוב מסעיף 1ג ע"י שמוש בפוטנציאל

(ה) כתבו את הכח במערכת צירים פולרית. האם הכח מרכזי ?

2. חלקיק הנמצא על גבי כדור חסר חיכוך מתחיל בתנועה ממנוחה. באיזו זווית (ביחס לציר z המחבר את הראשית עם נקודת המנוחה של החלקיק בראש הכדור) יעזוב החלקיק את הכדור ?

3. מטוטלת מתמטית מורכבת מחוט באורך ℓ ומסה m התלויה בקצהו. המטוטלת נוטה בזווית θ ביחס לחוט בנקודת שווי המשקל.

(א) רשמו את האנרגיה הכללית (קינטית+פוטנציאלית) של המטוטלת

(ב) קבלו את משוואת התנועה בקרוב תנודות קטנות $\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$ מתוך שימור האנרגיה (רמז: קבלו בטוי לאנרגיה של אוסצילטור הרמוני)

4. חרוז מחליק על מסילה חסרת חיכוך אשר גובהה y נתון ע"י הפונקציה $y = f(x)$. ידוע כי בנקודה $(x, y) = (0, 0)$ המסילה אנכית והחרוז עובר בנקודה זו עם מהירות אנכית $-V$ (מטה). הראו כי על מנת שהמהירות בכוון האנכי תהיה קבועה ושווה ל $-V$, צורת המסילה נתונה ע"י

$$y = f(x) = -\frac{(3gVx)^{2/3}}{2g}$$