

תרגיל 7 – אנליזה למורים

שאלה 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{2n} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5k}{2n}\right) \quad (\text{ד})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{n^4} \quad (\text{א})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \ln(n!) - \ln n \right) \quad (\text{ה})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos\left(\frac{\pi k}{n}\right) \quad (\text{ב})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \dots + \sqrt{2n}}{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}} \quad (\text{ו})$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{5}{n} \sqrt{4 + \frac{5k}{n}} \quad (\text{ג})$$

שני תרגילים הבאים יעסקו בנושא גזירה של אינטגרלים.

שאלה 2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} (\arcsin 2t - 2 \arcsin t) dt}{x^8} \quad (\text{ג})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x (t \cot t - 1) dt}{x^3} \quad (\text{א})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{3x^5} e^{-\frac{1}{t}} dt}{x^{81}} \quad (\text{ד})$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt}{x^3} \quad (\text{ב})$$

שאלה 3 (ממבחן של ארז)

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה ואי שלילית, כלומר לכל x מתקיים $0 \leq f(x)$.

נגדיר את הפונקציה $g(x) = x \int_0^x f(t) dt$.

א. הוכיחו כי הפונקציה $g(x)$ מונוטונית עולה בתחום $[0, \infty)$.

ב. נניח בנוסף כי $f(x)$ מונוטונית עולה, הוכיחו כי $g(x)$ מחייכת (קמורה) בתחום $[0, \infty)$.

תזכורת: פונקציה גזירה בתחום היא מונוטונית עולה אם הנגזרת הראשונה גדולה מאפס באותו התחום.

פונקציה גזירה פעמיים היא קמורה בתחום אם הנגזרת השנייה שלה היא חיובית באותו התחום.

הערה: תשמו לב ש-

$$g(x) = x \int_0^x f(t) dt$$

היא מכפלה של שתי פונקציות ולכן גזרו אותה לפי כלל המכפלה