לינארית 2 - תרגיל 1

1. נתונות שתי מטריצות:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

א. חשבו את $\det A$ ו$\det B$ באמצעות שיטת המינורים.

ב. חשבו את $\det A$ ו$\det B$ באמצעות שיטת הדירוג.

פתרון:

א. עבור המטריצה A: נפתח לפי השורה הראשונה.

$$|A| = 1 \cdot \left| \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \right| - 2 \cdot \left| \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \right| + 3 \cdot \left| \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \right| = 1 \cdot (-3) - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-3) = 0.$$

עבור המטריצה B: נפתח לפי השורה האחרונה:

$$|B| = 1 \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right|.$$

(למעשה קיבלנו מטריצה משולשית, שאת הדטרמיננטה שלנו אנחנו כבר יודעים לחשב בכל זאת, לצורך השאלה, נמשיך בשיטת המינורים).

נפתח את הדטרמיננטה של המטריצה שהתקבלה לפי השורה הראשונה.

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right| = 1 \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right| = 3.$$

לכן, $|B| = 3$.

ב. נתחיל מהמטריצה A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

קיבלנו מטריצה עם שורת אפסים, הדטרמיננטה שלה היא 0.

הפעולות שעשינו לא משנות את הדטרמיננטה, ולכן $|A| = 0$.

כעת, נדרג את המטריצה B:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

הגענו למטריצה משולשית. הדטרמיננטה שלה היא מכפלת איברי האלכסון, כלומר, 3.

הפעולות שעשינו לא משנות את הדטרמיננטה, ולכן $|B| = 3$.

2. הוכיחו כי לא קיימת $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ כך ש $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

פתרון:

נסמן $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

נניח בשלילה שקיימת $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ כך ש $A^2 = B$.

אזי, $|A^2| = |B|$. מכפליות הדטרמיננטה נקבל: $|A|^2 = |B|$.

אבל $|B| = -1$. כמוכן, לכל מטריצה עם רכיבים ב$\mathbb{R}$, הדטרמיננטה היא גם ב$\mathbb{R}$ (כי היא בסה"כ מכפלות וסכומים של האיברים). לכן $|A| \in \mathbb{R}$.

אולם, ידוע שב$\mathbb{R}$ אין שורש ל-1. סתירה.

3. תהי $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ מטריצה אנטיסימטרית. חשבו את $\det A$.

פתרון:

נתון: $A = -A^t$.

לכן, $|A| = |-A^t| = (-1)^5|A^t| = -|A^t|$.

ידוע ש $|A| = |A^t|$, לכן:

$|A| = -|A| \Longrightarrow |A| = 0$.

4. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה הבאה:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

פתרון:

נשים לב שניתן להחליף שורות ולהגיע למטריצת היחידה, שכידוע הדטרמיננטה שלה היא 1. כל החלפת שורה שווה למכפלה של הדטרמיננטה ב-1 וצריך לבצע בדיוק $\left[\frac{n}{2}\right]$ החלפות.

לכן הדטרמיננטה של המטריצה היא $(-1)^{\left[\frac{n}{2}\right]}$.