תרגיל בית 1 אינפי 3

1. יהי $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ הוכיחו כי

$$\frac{|x_1| + \ldots + |x_n|}{\sqrt{n}} \le \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \le |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$$

רמז: בשביל אחד מצדדי האי שוויון יש להשתמש באי שוויון קושי שורץ.

פתרון. ראשית נוכיח את אי השוויון הימני

$$(\sum_{i=1}^{n} |x_i|)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |x_i||x_j| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + 2\sum_{1\le i<j\le n} |x_i||x_j| \ge \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2$$

לכן,

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2} \le \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

שזה בדיוק אי השוויון הימני.

בשביל להוכיח את אי השוויון השמאלי נגדיר

$$x = (|x_1|, \ldots, |x_n|), \quad y = (1, \ldots, 1)$$

לפי אי שוויון קושי שורץ

$$|x \cdot y| \le ||x||||y||$$

נשים לב ש

$$|x \cdot y| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}$$

$$||y|| = \sqrt{n}$$

ולכן מתקבל

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i|}{\sqrt{n}} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}$$

2. תהי $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ מטריקה. הוכיחו כי הפונקציות הבאות הן גם מטריקות:

(א) $\alpha(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$.

פתרון. ראשית נשים לב כי מאחר ו $d(x,y) \geq 0$ מתקיים גם כי $\min\{1, d(x,y)\} \geq 0$ ולכן $\alpha(x,y)$ היא פונקציה חיובית. כעת נבדוק את שאר התכונות:

i. קל לראות שהמרחק בין x ל y הוא 0 אם ורק אם הם שווים.

$$\alpha(x,y) = 0 \Leftrightarrow \min\{1, d(x,y)\} = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

ii. סימטריות: היות ו $d(x,y) = d(y,x)$ ברור ש

$$\alpha(x,y) = \min\{1, d(x,y)\} = \min\{1, d(y,x)\} = \alpha(y,x)$$

iii. אי שוויון המשולש: צריך להוכיח ש

$$\alpha(x,y) = \min\{1, d(x,y)\} \leq \min\{1, d(x,z)\} + \min\{1, d(z,y)\} = \alpha(x,z) + \alpha(z,y)$$

נחלק את ההוכחה למקרים

א'. נניח ש $1 \leq d(x,y)$ (כלומר $\alpha(x,y) = 1$) ו $1 \leq d(x,z)$ או $1 \leq d(z,y)$. נקבל ש $\alpha(x,z) = 1$ או $\alpha(z,y) = 1$, ולכן בכל מקרה

$$\alpha(x,y) = 1 \leq \alpha(x,y) + \alpha(y,z)$$

ב'. נניח ש $1 \leq d(x,y)$ (כלומר $\alpha(x,y) = 1$), אבל $d(x,z) < 1$ וגם $d(z,y) < 1$ אז

$$\alpha(x,y) = 1 \leq d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) = \alpha(x,z) + \alpha(z,y)$$

ג'. נניח ש $d(x,y) < 1$ (כלומר $\alpha(x,y) = d(x,y)$) ו $1 \leq d(x,z)$ או $1 \leq d(z,y)$. נקבל ש $\alpha(x,y) = 1$ או $\alpha(y,z) = 1$ ולכן בכל מקרה

$$\alpha(x,y) = d(x,y) < 1 \leq \alpha(x,y) + \alpha(y,z)$$

ד'. נניח ש $d(x,y) < 1$ (כלומר $\alpha(x,y) = d(x,y)$), אבל $d(z,y) < 1$ וגם $d(x,z) < 1$. אז

$$\alpha(x,y) = d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) = \alpha(x,z) + \alpha(z,y)$$

לכן בכל מקרה אי שוויון המשולש מתקיים.

(ב) $\beta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$.

פתרון. ראשית נשים לב ש $d(x,y) \geq 0$ $\Leftarrow$ $1 + d(x,y) > 0$ ולכן $\beta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ גם מוגדרת היטב וגם חיובית. כעת נוכיח את התכונות:

i. שווה 0 רק על איברים שווים:

$$\beta(x,y) = 0 \Leftrightarrow \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

ii. סימטריות: היות ו $d(x,y) = d(y,x)$ ברור ש

$$\beta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = \beta(y,x)$$

iii. אי שוויון המשולש: צריך להוכיח

$$\beta(x,y) \leq \beta(x,z) + \beta(z,y)$$

כלומר

$$\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)}$$

אם נעבוד קצת נקבל

$$d(x,y)(1+d(x,z))(1+d(z,y)) \leq d(x,z)(1+d(x,y))(1+d(z,y)) + d(z,y)(1+d(x,y))(1+d(x,z))$$

$$\begin{aligned} d(x,y)(1+d(x,z)+d(z,y)+d(x,z)d(z,y)) &\leq \\ d(x,z)(1+d(x,y)+d(z,y)+d(x,y)d(z,y)) & \\ +d(z,y)(1+d(x,y)+d(x,z)+d(x,y)d(x,z)) & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(x,y)+d(x,y)d(x,z)+d(x,y)d(z,y)+d(x,y)d(x,z)d(z,y) &\leq \\ d(x,z)+d(x,z)d(x,y)+d(x,z)d(z,y)+d(x,z)d(x,y)d(z,y) & \\ +d(z,y)+d(z,y)d(x,y)+d(z,y)d(x,z)+d(z,y)d(x,y)d(x,z) & \end{aligned}$$

וכאן כבר אפשר לצמצם כמה דברים ולקבל

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) + 2d(z,y)d(x,z) + d(x,z)d(x,y)d(z,y)$$

שזה כמובן נכון כי

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

לכן אי שוויון המשולש מתקיים.

3. קבעו עבור כל אחת מהקבוצות הבאות ב $\mathbb{R}^2$ אם היא פתוחה או אם היא סגורה (הוכיחו או הפריכו) ומצא את קבוצת נקודות הגבול.

(א) $A = \{(0,0),(1,0)\}$

פתרון. i. הקבוצה אינה פתוחה. הוכחה: לכל $r > 0$ בכדור $B((0,0),r)$ נמצאת הנקודה $(0,\frac{r}{2})$ שאינה בקבוצה. לכן $(0,0)$ אינה נקודה פנימית.

ii. הקבוצה סגורה: הוכחה: נראה שמשלימתה פתוחה. תהי (x,y) נקודה שאינה בקבוצה, אם $y \neq 0$. נבחר $r = \frac{|y|}{2}$ ואז הכדור $B((x,y),r)$ אינו מכיל אף נקודה מציר x ובפרט אף נקודה מהקבוצה A. אם $y = 0$ נבחר $r = \frac{1}{2}\min\{|x-1|,|x|\}$ ואז שוב $(0,0),(1,0) \notin B((x,y),r)$. לכן בכל מקרה (x,y) היא נקודה פנימית ל A^c.

iii. נקודות גבול: בגלל שהקבוצה סגורה, נקודות הגבול חייבות להיות מוכלות בה, לכן האפשרויות היחידות הן $(0,0),(1,0)$. אבל אם $r = \frac{1}{2}$, אין אף נקודה ב A בכדור $B((0,0),r)$ (פרט ל $(0,0)$ עצמה) - לכן $(0,0)$ אינה נקודת גבול. בדומה אין אף נקודה ב A בכדור $B((1,0),r)$ (פרט ל $(1,0)$ עצמה) - לכן $(1,0)$ אינה נקודת גבול. לסיכום: ל A אין נקודות גבול.

(ב) $B = \{(x,y) \mid x^2+y^2 < 1\} \cup \{(0,1)\}$

פתרון. i. הקבוצה אינה פתוחה. הוכחה: נראה כי $(0,1)$ אינה נקודה פנימית. לכל $r > 0$, הכדור $B((0,1),r)$ מכיל את הנקודה $(0,1+\frac{r}{2})$ שאינה נמצאת בקבוצה A. לכן $(0,1)$ אינה נקודה פנימית ולכן A אינה פתוחה.

ii. הקבוצה אינה סגורה. הוכחה: נראה כי משלימתה לא פתוחה. נשים לב ש $(1,0)$ נמצאת ב A^c. לכל $r > 0$, הכדור $B((1,0),r)$ מכיל את הנקודה $(1-\frac{r}{2},0)$ שאינה נמצאת ב A^c, לכן $(1,0)$ אינה נקודה פנימית של A^c. לכן A^c אינה פתוחה ולכן A אינה סגורה.

iii. נקודות גבול: בגלל שהקבוצה $A \supseteq B((0,0),1) = \{(x,y) \mid x^2+y^2 < 1\}$ היא כדור פתוח, כל נקודה שלה היא נקודה פנימית ולכן היא גם נקודת הצטברות. נקודות בקבוצה $\{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1\}$ הן גם נקודות גבול, כי לכל $r > 0$, נוכל לבחור $r' = \min\{r,1\}$ ואז הנקודה $((1-\frac{r'}{2})x,(1-\frac{r'}{2})y)$ נמצאת ב $B((x,y),r) \cap A$ ולכן אלה גם נקודות גבול. הנקודות בקבוצה $\{(x,y) \mid x^2+y^2 > 1\}$ הן כולן נקודות פנימית של הקבוצה הזאת ולכן קיים כדור $B((x,y),r)$ שמוכל כולו ב $\{(x,y) \mid x^2+y^2 > 1\}$ ולכן זר

ל A. לכן נקודות אלה הן לא נקודות גבול. לסיכום: נקודות הגבול הן $\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\} = \overline{B}((0,0),1)$.

(ג) $C = \{(x,y) \mid 0<x, \quad y<0\}$

פתרון. i. הקבוצה פתוחה. הוכחה: לכל, $(x,y) \in A$. נבחר $r = \frac{1}{2}\min\{|x|,|y|\}$. ואז $B((x,y),r) \subseteq A$, מפני שאם $(a,b) \in B((x,y),r)$ אז

$$|a-x| < \sqrt{|a-x|^2+|b-y|^2} < r \le \frac{1}{2}|x|$$

ולכן

$$a > x - \frac{1}{2}|x| = |x| - \frac{1}{2}|x| = \frac{1}{2}|x| > 0$$

באופן דומה $|b-y| < \frac{1}{2}|y|$ ולכן .

$$b < y + \frac{1}{2}|y| = -|y| + \frac{1}{2}|y| = -\frac{1}{2}|y| < 0$$

לכן $(a,b) \in A$.

ii. הקבוצה אינה סגורה. הוכחה: המשלים מכיל את $(0,0)$ ולכל $r>0$ הכדור $B((0,0),r)$ מכיל את הנקודה $(\frac{r}{2},-\frac{r}{2})$ שאינה נמצאת ב A^c. לכן $(0,0)$אינה נקודה פנימית של A^c ולכן A אינה קבוצה סגורה.

iii. כמו בסעיף הקודם, כל נקודה פנימית היא נקודת גבול וכל נקודה חיצונית (נקודה פנימית של A^c) היא לא נקודת גבול. שאר הנקודות (אלה שהן לא פנימיות ולא חיצוניות) הן הנקודות

$$\{(x,y) \mid x=0,\, y \le 0\} \cup \{(x,y) \mid x \ge 0, \quad y=0\}$$

נקודות אלה הן נקודות גבול כי לכל $r>0$ נוכל לבחור את הנקודה $(x+\frac{r}{2}, y-\frac{r}{2})$ שנמצאת ב $B((x,y),r) \cap A$. לסיכום: נקודות הגבול הן $\{(x,y) \mid x \ge 0, \quad y \le 0\}$.

4. האם הקבוצות הבאות פתוחות או סגורות?

(א) $A = \{(x,y) \mid y=0, \quad x \in (0,1)\}$ ב $\mathbb{R}^2$.

פתרון. i. הקבוצה אינה פתוחה. הוכחה: נבחר למשל את $(\frac{1}{2},0)$. לכל $r>0$, הנקודה $(\frac{1}{2},\frac{r}{2})$ נמצאת ב $B((\frac{1}{2},0),r)$ אבל לא נמצאת ב A, לכן $(\frac{1}{2},0)$ אינה נקודה פנימית ו A אינה פתוחה.

ii. הקבוצה אינה סגורה. הוכחה: נראה כי A^c אינה פתוחה, כי $(0,0)$ אינה נקודה פנימית שלה. ובאמת, לכל $r>0$ נוכל לבחור $r'=\min\{r,1\}$ ואז הנקודה $(0,\frac{r'}{2})$ נמצאת ב $B((0,0),r)$ אבל לא נמצאת ב A^c. לכן A היא לא קבוצה סגורה.

(ב) $B=(0,1)$ ב $\mathbb{R}$.

פתרון. i. הקבוצה פתוחה. הוכחה: לכל $x\in(0,1)$ נבחר $r=\frac{1}{2}\min\{x,1-x\}$ ואז לכל $y\in B(x,r)$ מתקיים

$$|y-x|<r$$

ולכן

$$y<x+r<x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}x<1$$

ו

$$y>x-r>x-\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}x>0$$

ולכן $B(x,r)\subseteq(0,1)$. לכן A פתוחה.

ii. הקבוצה אינה סגורה. הוכחה: נראה כי A^c אינה פתוחה. נביט על $0\in A^c$. לכל $r>0$, נבחר $r'=\min\{r,1\}$ ואז $\frac{r'}{2}\in B(0,r)\cap A$ ולכן 0 אינה נקודה פנימית של A^c ולכן A אינה סגורה.

5. יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי $A\subseteq X$ קבוצה. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים.

(א) קיימים $x_0\in X$ ו $0<r\in\mathbb{R}$ כך ש $A\subseteq B(x_0,r)$.

(ב) לכל $x_0\in X$ קיים $0<r\in\mathbb{R}$ כך ש $A\subseteq B(x_0,r)$.

(ג) קיים $0<M\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x,y\in A$ מתקיים $d(x,y)<M$.

הערה: קבוצה A המקיימת תכונות אלה נקראת חסומה.

פתרון. (א) א$\Leftarrow$ג: נבחר $M=2r$. אם $x,y\in A$ אז בגלל ש $x,y\in B(x_0,r)$ נקבל כי

$$d(x,y)\leq d(x,x_0)+d(x_0,y)<r+r=2r=M$$

שזה מה שדרוש.

(ב) ג ⇐ב: יהי $x_0 \in X$ כלשהוא נבחר $a \in A$ כלשהוא ונגדיר $d = d(a, x_0)$ ו $r = d + M$. כעת, לכל $x \in A$ מתקיים

$$d(x, x_0) \leq d(x, a) + d(a, x_0) \leq M + d = r$$

לכן $x \in B(x_0, r)$ כנדרש.

(ג) ב ⇐א: מיידי. אם הטענה נכונה לכל $x_0 \in X$ אזי קיים $x_0 \in X$ עבורו הטענה נכונה.

6. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

(א) אם $A \subseteq B$ אז $\partial A \subseteq \partial B$.

פתרון. ממש לא נכון. אם $A = \mathbb{Q}$ ו $B = \mathbb{R}$ בתוך המרחב המטרי $\mathbb{R}$. אז ראינו בכיתה ש

$$\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$$

אבל

$$\partial\mathbb{R} = \varnothing$$

(ב) לכל שתי קבוצות A, B מתקיים $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

פתרון. נכון. נשים לב ש

$$A \subseteq A \cup B \subseteq \overline{A \cup B}$$

עכשיו, בגלל ש $\overline{A}$ היא הקבוצה הסגורה הכי קטנה שמכילה את A, נקבל ש

$$\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$$

באותו אופן מראים ש

$$\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$$

ולכן

$$\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$$

זה צד אחד של השוויון שצריך להוכיח. עכשיו מצד שני נשים לב ש

$$A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$$

נשים לב ש $\overline{A}\cup\overline{B}$ היא קבוצה סגורה כי היא איחוד של שתי קבוצות סגורות. עכשיו, היות ש $\overline{A\cup B}$ היא הקבוצה הסגורה הכי קטנה שמכילה את $A\cup B$ נקבל ש

$$\overline{A\cup B}\subseteq\overline{A}\cup\overline{B}$$

זה הכיוון השני וזה מוכיח לנו ש

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$

כנדרש.

(ג) לכל שתי קבוצות A,B מתקיים $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

פתרון. לא נכון. אם ניקח ב $\mathbb{R}$ את הקבוצות

$$A=(0,1)\quad B=(1,2)$$

אז

$$\overline{A}=[0,1]\quad\overline{B}=[1,2]$$

ולכן

$$\overline{A\cap B}=\{1\}$$

לעומת זאת

$$A\cap B=\varnothing$$

ולכן

$$\overline{A\cap B}=\varnothing$$

7. תהי A קבוצה במרחב מטרי (X,d). הוכיחו כי קבוצת נקודות הגבול A' היא קבוצה סגורה.

פתרון. נראה כי $(A')^c$ היא קבוצה פתוחה. נניח $x\in(A')^c$, נראה כי x נקודה פנימית. היות ו x אינה נקודת גבול של A, קיים $r>0$ כך ש $B(x,r)\backslash\{x\}$ אינו מכיל נקודות מ A. כדי להראות ש x היא נקודה פנימית, צריך להראות ש $B(x,r)\subseteq(A')^c$. כלומר צריך להראות שכל נקודה בכדור הזה אינה נקודת גבול. נניח בשלילה כי קיים $l\in A'\cap B(x,r)$. נשים לב ש $x\neq l$ כי x היא לא נקודת גבול. בגלל ש $B(x,r)$ קבוצה פתוחה, קיים $r'>0$ כך ש $B(l,r')\subseteq B(x,r)$. נבחר $0<r''<\min\{r',d(l,x)\}$ (קיים r'' כנ"ל כי $x\neq l$). לכן $x\notin B(l,r'')\subseteq B(x,r)$. בגלל ש l נקודת גבול,

קיים $A \ni a$ כך ש $B(x,r) \supseteq B(l,r'') \ni a$. לכן $B(x,r) \ni a$ ו $x \neq a$ (כי $x \notin B(x,r'')$). זאת בסתירה להגדרת r ($B(x,r)\setminus\{x\}$ אינו מכיל נקודות מ A).